

석사 학위논문

초탄성 비선형 재료 모델을
포함하는 Partition of Unity
기반 사면체 유한요소 개발

2025년 02월 21일

전 북 대 학 교 대 학 원

기 계 시 스 템 공 학 과

임 태 중

초탄성 비선형 재료 모델을
포함하는 Partition of Unity
기반 사면체 유한요소 개발

Partition of Unity-based Tetrahedral
Finite Element for Nonlinear Structure Analysis
of Nearly Incompressible Solids

2025년 02월 21일

전 북 대 학 교 대 학 원

기 계 시 스 템 공 학 과

임 태 중

초탄성 비선형 재료 모델을
포함하는 Partition of Unity
기반 사면체 유한요소 개발

지도교수 전 형 민

이 논문을 공학 석사 학위논문으로 제출함.

2024년 10월 16일

전 북 대 학 교 대 학 원

기 계 시 스 템 공 학 과

임 태 중

임 태 중의 석사학위논문을 인준함.

위 원 장	전북대학교	부교수	김 은 호 (인)
위 원	전북대학교	부교수	이 동 휘 (인)
위 원	전북대학교	부교수	전 형 민 (인)

2025년 01월 14일

전 북 대 학 교 대 학 원

목 차

목 차	I
표 목 차	III
그 림 목 차	IV
A B S T R A C T	VI
1. 서론	1
2. Partition of Unity 기반 유한요소	5
2.1. Partition of Unity 기반 사면체 유한요소	6
2.1.1 표준 4절점 사면체 유한요소	6
2.1.2 Partition of Unity 기반 고차 유한요소 근사	7
3. 초탄성 재료 비선형 Partition of Unity 유한요소	11
3.1. 초탄성 재료 모델링	11
3.1.1. Rubber-Like 초탄성 재료의 구성 모델	11
3.1.2. Nearly-Incompressible 초탄성 재료	13
3. 2. 대변위 운동학	16
3.2.1. Total Lagrangian 정식화	16
3.2.2. 가상 일의 원리를 통한 평형 방정식	21
3.2.3. 평형 방정식의 선형화	22
3.3. 초탄성 구조물의 비선형 정적해석	24
3.3.1. 다양한 푸아송 비를 가지는 켄틸레버 빔의 체적 잠금	26
3.3.2. 압축 하중을 받는 초탄성 블록	31
3.3.3. 큰 굽힘 변형을 겪고 있는 초탄성 실린더	36
3.3.4. 초탄성 블록의 메쉬 왜곡 민감도 분석	41
3.3.5. 압축 하중을 받는 초탄성 타이어	45
4. 비선형 Partition of Unity 유한요소의 비선형 모드해석	49
4.1. 자유진동 분석을 위한 운동 방정식	49
4.2. 비선형 모드해석 절차	51

4.3. 초탄성 구조물의 비선형 모드해석 결과	52
4.3.1. 왜곡된 메쉬를 가지는 초탄성 판	53
4.3.2. Cutout을 가지는 쉘 실린더	58
4.3.3. 한쪽면이 고정된 초탄성 소프트 로봇	62
5. 결 론	65
참 고 문 헌	67

표 목 차

Table 3. 1 List of finite elements for comparison.....	25
Table 3. 2 Comparison of mesh types and number of elements/nodes by element type used in example 3.3.1.....	26
Table 3. 3 Mesh density and corresponding element and node counts used in example 3.3.2	31
Table 3. 4 Mesh density and corresponding element and node counts used in example 3.3.4	42
Table 3. 5 Vertical displacement and relative error comparison for different elements.....	43
Table 4. 1 Mesh density and corresponding element and node counts used in example 4.3.1.	53

그림 목 차

Fig. 2. 1 Partition of unity-based interpolation covers; (a) linear interpolation function; (b) cover region C_i affected by the interpolation cover; (c) an element.....	5
Fig. 3. 1 Definition of initial (time 0), last calculated (time t), and current deformed (time $t + \Delta t$) configurations in the cartesian coordinate system.....	17
Fig. 3. 2 Cantilever beam subjected to moment loads.....	27
Fig. 3. 3 Calculated load-displacement curves at point A for the cantilever beam with varying poisson's ratio	28
Fig. 3. 4 Comparison of normalized displacement for different elements with varying poisson's ratio	29
Fig. 3. 5 Deformed shapes of a cantilever beam composed of TET4E elements according to changes in poisson's ratio, with a scale factor of 4 applied	30
Fig. 3. 6 Block under compression.....	32
Fig. 3. 7 Convergence of vertical displacement at center point a	33
Fig. 3. 8 Deformed shapes of a block composed of TET4E elements under a pressure of 320 MPa	35
Fig. 3. 9 Thick symmetrical cylinder under line load	36
Fig. 3. 10 Convergence curve for the different elements with varying mesh densities.....	37
Fig. 3. 11 Load-displacement curves for the thick symmetrical cylinder at point A	38
Fig. 3. 12 Deformed shapes of the cylindrical shell under	

different mesh densities and pressure loads.....	40
Fig. 3. 13 Cube with a base under uniform pressure.....	42
Fig. 3. 14 Vertical displacements across different distortion factors for TET4 and TET4E with varying mesh densities	43
Fig. 3. 15 Deformed shapes of a cube under uniform pressure for different mesh densities and distortion factors	44
Fig. 3. 16 Tire under vertical load (265/35R20RH)	45
Fig. 3. 17 Vertical displacement of a tire's upper surface along the horizontal position	46
Fig. 3. 18 Comparison of deformation using TET4 and TET4E under uniform pressure across different mesh densities.....	48

A B S T R A C T

Partition of Unity–based Tetrahedral Finite Element for Nonlinear Structure Analysis of Nearly Incompressible Solids

Tae–Jung Lim

Department of Mechanical System Engineering

The Graduate School

Jeonbuk National University

In this study, we developed and evaluated a four–node tetrahedral finite element (TET4E) based on the Partition of Unity (PU) method for the nonlinear structural analysis of nearly incompressible hyperelastic materials. Hyperelastic materials can undergo large elastic deformations and are employed across various engineering fields. However, during the nonlinear analysis of hyperelastic structures, the constraints imposed to prevent volumetric changes often induce volumetric locking, which can significantly reduce accuracy. To release this issue, we applied the PU approach to standard tetrahedral elements. By incorporating Mooney–Rivlin and Neo–Hookean material models, we accurately captured hyperelastic behavior and integrated a penalty method to address nearly incompressible conditions. For

nonlinear static analysis, we adopted a total Lagrangian formulation to account for large deformations. In addition, an amplitude-based nonlinear modal analysis procedure was utilized to obtain nonlinear natural frequencies and corresponding mode shapes.

We validated the performance and accuracy of the proposed finite element through a series of numerical examples, including a compressed block, a mesh distortion sensitivity test, and a hyperelastic tire under compression in nonlinear static analysis. Compared to existing finite elements, the proposed finite element demonstrated superior effectiveness in alleviating volumetric locking and achieved excellent accuracy. Additionally, in nonlinear modal analysis, we examined cases such as distorted plates under free vibration, cylindrical shells, and hyperelastic soft robots. Even when the mesh was distorted or relatively coarse, TET4E accurately reproduced the nonlinear natural frequencies.

Keywords: 4-node Tetrahedral Element, Hyperelastic Materials, Large Displacement Analysis, Nonlinear Modal Analysis, Partition of Unity

1. 서론

초탄성(Hyperelastic) 재료는 비선형적인 응력-변형률 거동을 보이며, 외부 하중에 의해 100% 이상의 큰 변형이 발생해도 하중을 제거하면 본래 형태로 복원되는 특성을 갖는다 [1]. 이러한 특성 덕분에 초탄성 재료는 기계공학부터 생체공학에 이르기까지 폭넓게 활용된다. 대표적인 예로 고무, 엘라스토머, 다양한 생체 재료 등이 있다. 이들은 고무 밸브 [2], 타이어 [3], 베어링 [4] 같은 산업용 제품뿐만 아니라 소프트 로봇 [5], 대동맥 판막 보철물 [6], 암 진단 및 치료 [7], 재활을 위한 착용형 로봇 [8] 등 첨단기술 분야에서도 적용되고 있다.

초탄성 구조물 설계 및 제작 중요성이 증가함에 따라, 유한요소법을 이용해 초탄성 구조물을 해석 및 최적화하는 작업이 필수화되었다. 유한요소법은 연속적인 물리 시스템을 유한 개의 작은 요소로 분할한 후, 각 요소의 절점 정보를 바탕으로 전체 시스템의 거동을 근사적으로 예측하는 수치 해석 기법이다 [9]. 이를 초탄성 구조물에 적용하면, 응력 분포, 변형 양상, 피로 수명, 동적 특성 등을 정밀하게 예측할 수 있어 실제 구조물을 제작하지 않고도 여러 설계안을 평가하고 구조물 거동을 이해하는데 도움을 준다.

그러나 초탄성 구조물을 해석할 때는 기하학적 비선형성(Geometric Nonlinearity)과 재료 비선형성(Material Nonlinearity)을 모두 고려해야하므로 계산과정이 복잡해진다 [10]. 특히 초탄성 재료는 변형 체적 변화가 거의 없는 비압축성(Nearly-Incompressibility) 거동을 나타내는데, 이를 유한요소 모델에서 구현하려면 체적 변화 없이 변형이 일어나도록 구속 조건을 부여해야 한다 [11]. 하지만

이러한 구속은 요소의 강성을 과도하게 증가시켜 체적 잠금(Volumetric Locking)을 유발하며, 이는 해석 정확도를 저하시킨다 [12]. 체적 잠금을 완화하기 위해 축소 적분(Reduced Integration)과 안정화(Stabilization) 기법이 제안되었으나 [13], 인위적인 안정화 매개변수에 의존한다는 단점이 있고 [14], 특정 굽힘 문제에서는 매개변수 선정에 따라 해석 결과가 크게 달라질 수 있다 [13]. 이 밖에 섭동 항(Perturbation Term) [15]이나 버블 함수(Bubble Function) [16]을 도입하는 방안도 연구되었으나, 섭동항 방식은 메쉬 변화에 맞춰 매개변수를 조절해야 하고 대변형 문제에서 불안정성을 일으킬 수 있으며 [17], 버블 함수는 작은 압력 진동을 유발할 수 있다는 한계가 보고되고 있다 [17]. 메쉬리스 방법도 왜곡된 절점 절점 배치에 유연하게 대응할 수 있다는 장점이 있으나 [18, 19], 여전히 체적 잠금은 완전히 해소하지 못하기 때문에 추가 연구가 필요하다. 초탄성 비선형 구조물의 정확한 해석을 위해 체적 잠금을 해결하는 방안으로 Partition of Unity(PU) 기반 유한요소가 효과적인 대안으로 제안된다.

PU 방법은 해석 영역을 여러 개의 보간 커버(Cover)로 분할하고, 각 커버가 내에서 정의된 다항식 보간함수를 통해 절점 변위를 근사하는 방법이다 [20]. PU 기반 유한요소는 저차 요소에 커버 보간을 적용하여 고차 변위 보간을 구현함으로써, 추가적인 노드 도입이나 메쉬 재구성 없이 해석 정확도를 향상시킬 수 있다 [21]. PU 기반 유한요소는 기존에 선형 탄성 문제를 대상으로 2 차원 및 3 차원 요소 [22], 다각형 요소 [23], 쉘 요소 [21, 24, 25] 등에 적용되어 해의 정확도를 개선한 것으로 보고되었다. 또한, PU 방법은 균열 모델링에 활용되는 XFEM(eXtended finite element method)으로

확장되었으며[26], 상용 소프트웨어인 ANSYS [27]와 Abaqus [28]에도 구현되어 있다. XFEM 은 균열이 포함된 요소의 노드에 불연속 기반함수(Discontinuous Basis Function)를 추가하여 균열의 거동을 계산하며, 균열 근처에서 세밀한 메쉬 분할 없이도 높은 정확도를 제공한다 [29]. 이 방법은 상용 소프트웨어인 ANSYS [27]와 Abaqus [28]에도 구현되어 널리 사용되고 있다. 그러나 현재 PU 방법에 대한 연구는 주로 선형 탄성 재료나 단순한 물성 조건에 집중되어 있어, 초탄성 재료 구조물에 대한 비선형 구조 해석 연구는 보고되지 않았다.

본 연구에서는 Nearly-Incompressible 초탄성 재료에서 발생하는 체적 잠금 문제를 완화하고 비선형 구조해석을 수행하기 위해, PU 기반 4 절점 사면체 유한요소 (TET4E)를 개발하였다. 개발된 요소는 체적잠금 현상 완화 능력, 요소 형상 왜곡에 따른 해석 안정성, 자유도 증가에 따른 정확도 등을 여러 예제를 통해 평가하였다.

2 장에서는 표준 사면체 요소에 PU 근사를 적용하는 방법론을 제시하였으며, 3 장에서는 Mooney-Rivlin 및 Neo-Hookean 모델을 활용해 초탄성 거동을 모델링하고, 비압축성 구현을 위한 패널티 기법과 대변위 해석을 위한 Total-Lagrangian 공식을 적용하였다. 비선형 평형 방정식은 Newton-Raphson 기법으로 선형화하여 해를 구하였다. 수치 예제에서는 캔틸레버 빔에서 발생하는 체적 잠금 현상, 압축 하중을 받는 초탄성 블록 문제, 대변형을 겪는 실린더 문제, 메쉬 민감도 분석, 초탄성 타이어 변형 해석을 수행하였다. 그 결과 TET4E 요소는 체적 잠금을 효과적으로 완화하고, 요소 형상이 왜곡되었을 때도 안정적인 해석 결과를 제공하였다. 또한 기존 사면체 유한요소나 선형 연구 방법과 비교했을 때, 상대적으로 적은 수의 요소로도 정확한

결과를 도출하였다. 4 장에서는 PU 기반 유한요소를 이용한 진폭 기반 반복해석을 통한 초탄성 재료 비선형성을 포함한 비선형 모드 해석 기법을 제안하고, 왜곡 메쉬를 가지는 초탄성 판, Cutout 이 있는 초탄성 쉘 실린더, 초탄성 소프트 로봇 예제를 통해 비선형 진동 특성을 분석하였다. TET4E 는 적은 수의 요소만으로도 비선형 고유 진동수와 모드형상을 정확하게 예측함을 확인하였으며, 이를 통해 Nearly-Incompressible 초탄성 재료 구조물의 비선형 거동을 정밀하게 해석할 수 있음을 검증하였다.

2. Partition of Unity 기반 유한요소

유한요소 솔루션의 정확도를 향상시키기 위해, 본 연구에서는 서로 겹치는 서브 도메인을 정의하는 PU 기반 접근법을 도입한다. 이러한 겹치는 서브 도메인의 공통 영역은 기존 메쉬의 유한요소로 가정되며, 각 서브도메인은 서로 독립적인 보간 커버(Interpolation Cover)로 덮이게 된다. 이를 통해 고차 보간을 수행할 수 있어 해석의 정확도를 크게 향상시킬 수 있다. Fig. 2. 1는 커버 영역과 요소 간의 관계를 설명한다. (a)에서는 각 절점 i 에 연결된 요소들로 구성된 커버영역 C_i 를 나타내며, (b)는 절점 i 가 영향을 미치는 요소의 집합을 의미한다. (c)는 여러 절점 i, j, k 의 커버영역 C_i, C_j, C_k 가 겹쳐 하나의 요소 m 을 형성하는 과정을 보여준다.

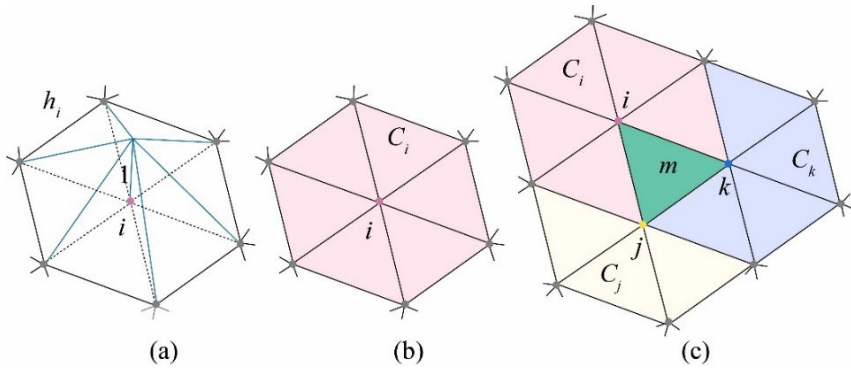


Fig. 2. 1 Partition of Unity-based interpolation covers; (a) Linear interpolation function; (b) Cover region C_i affected by the interpolation cover; (c) An element

본 절에서는 먼저 표준 4절점 사면체 유한요소를 검토하고, PU 기반 고차 근사 기법을 도입하여 체적 잠금 현상을 완화하고 해석의 정확도를 향상시키는 과정에 대해 논의한다.

2.1. Partition of Unity 기반 사면체 유한요소

2.1.1 표준 4절점 사면체 유한요소

표준 4절점 사면체 유한요소는 3차원 구조 해석에서 가장 기본적인 요소 중 하나로 복잡한 곡면이나 곡률을 포함하는 구조를 효과적으로 모델링할 수 있어 유한요소 해석에서 널리 사용된다. 사면체 요소의 형상 함수는 각 절점에서 요소 내부의 임의의 점에서의 좌표를 보간하는 역할을 하며, 이는 지역 좌표계(Local Coordinate System)에서 정의된다. 이를 통해 요소 내부의 좌표를 선형적으로 보간할 수 있으며, 각 절점에서의 좌표와 형상함수의 곱으로 표현된다.

$$\mathbf{x}(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s, t) \mathbf{x}_i \quad \text{with} \quad \mathbf{x}_i = [x_i, y_i, z_i]^T \quad (2.1)$$

여기서 $\mathbf{x}_i$ 는 각 절점에서의 전역 좌표(Global Coordinate)를 나타내고, $h_i(r, s, t)$ 는 지역 좌표계에서의 정의된 형상 함수다. 4절점 사면체 요소의 형상함수는 다음과 같이 정의된다.

$$h_1(r, s, t) = 1 - r - s - t, \quad (2.2)$$

$$h_2(r, s, t) = r, \quad h_3(r, s, t) = s, \quad h_4(r, s, t) = t$$

요소 내부의 임의의 점에서의 변위는 절점 변위를 선형적으로 결합한 형상 함수를 사용하여 계산할 수 있다.

$$\mathbf{u}(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s, t) \mathbf{u}_i \quad \text{with} \quad \mathbf{u}_i = [u_i, v_i, w_i]^T \quad (2.3)$$

여기서 $\mathbf{u}(r, s, t)$ 는 요소 내부 임의의 위치에서의 변위 벡터를 나타내고, $\mathbf{u}_i$ 는 각 절점 i 에서의 변위 벡터이다.

2.1.2 Partition of Unity 기반 고차 유한요소 근사

PU 기반 유한요소법에서는 기존 형상 함수와 PU 근사 함수를 결합하여 요소 내부의 변위를 보간한다. 이를 통해 추가적인 메쉬 없이 고차 보간을 통해 해석의 정확성을 높일 수 있다. 요소 내부에서 변위 벡터 $\mathbf{u}(r,s,t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{u}(r,s,t) = \sum_{i=1}^4 h_i(r,s,t) \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) = [\bar{u}_i(\mathbf{x}), \bar{v}_i(\mathbf{x}), \bar{w}_i(\mathbf{x})]^T$$

여기서, $\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x})$ 는 절점 i 에서의 x -, y -, z - 방향 변위 벡터를 나타낸다. 변위 필드 근사를 확장하고 더욱 복잡한 변형 모드를 반영하기 위해 PU 기법이 적용되었다. 각 절점에서의 변위 성분은 다항식 기저를 사용하여 다음과 같이 근사된다.

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i^u = \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) a_{ki}^u,$$

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i^v = \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) a_{ki}^v, \quad (2.5)$$

$$\bar{w}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i^w = \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) a_{ki}^w$$

여기서 $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1, x, y, z]$ 는 다항식 기저를 의미하며, 선형 기저 함수의 경우 $m=4$ 이다. 계수 벡터 $\mathbf{a}_i^u$, $\mathbf{a}_i^v$, $\mathbf{a}_i^w$ 는 각각 다음과 같은 미지 계수 (Unknown Coefficient)를 포함한다.

$$\mathbf{a}_i^u = [a_{1i}^u \quad a_{2i}^u \quad a_{3i}^u \quad a_{4i}^u]^T,$$

$$\mathbf{a}_i^v = [a_{1i}^v \quad a_{2i}^v \quad a_{3i}^v \quad a_{4i}^v]^T, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{a}_i^w = [a_{1i}^w \quad a_{2i}^w \quad a_{3i}^w \quad a_{4i}^w]^T$$

선형 다항식 기저만으로 솔루션의 정확성을 충분히 보장할 수 있다 [23]. 이에 따라 절점 i 에서의 변위 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\bar{u}_i(\mathbf{x}) &= a_{1i}^u + a_{2i}^u x + a_{3i}^u y + a_{4i}^u z, \\ \bar{v}_i(\mathbf{x}) &= a_{1i}^v + a_{2i}^v x + a_{3i}^v y + a_{4i}^v z, \\ \bar{w}_i(\mathbf{x}) &= a_{1i}^w + a_{2i}^w x + a_{3i}^w y + a_{4i}^w z\end{aligned}\tag{2.7}$$

또한, 절점 i 에서의 변위 $\bar{u}_i(\mathbf{x})$, $\bar{v}_i(\mathbf{x})$, $\bar{w}_i(\mathbf{x})$ 는 절점 변위 $\bar{u}_{i0}$, $\bar{v}_{i0}$, $\bar{w}_{i0}$ 를 포함하며 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned}\bar{u}_i(x_i) &= a_{1i}^u + a_{2i}^u x_i + a_{3i}^u y_i + a_{4i}^u z_i = \bar{u}_{i0}, \\ \bar{u}_i(y_i) &= a_{1i}^v + a_{2i}^v x_i + a_{3i}^v y_i + a_{4i}^v z_i = \bar{v}_{i0}, \\ \bar{u}_i(z_i) &= a_{1i}^w + a_{2i}^w x_i + a_{3i}^w y_i + a_{4i}^w z_i = \bar{w}_{i0}\end{aligned}\tag{2.8}$$

위의 식을 이용하여 a_{1i}^u , a_{1i}^v , a_{1i}^w 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}a_{1i}^u &= \bar{u}_{i0} - a_{2i}^u x_i - a_{3i}^u y_i - a_{4i}^u z_i, \\ a_{1i}^v &= \bar{v}_{i0} - a_{2i}^v x_i - a_{3i}^v y_i - a_{4i}^v z_i, \\ a_{1i}^w &= \bar{w}_{i0} - a_{2i}^w x_i - a_{3i}^w y_i - a_{4i}^w z_i\end{aligned}\tag{2.9}$$

식 (2.9)를 식 (2.7)에 대입하면, 절점 i 를 기준으로 공간 변수 $\mathbf{x}$ 에 대한 1차 다항식 형태로 변위를 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\bar{u}_i(\mathbf{x}) &= \bar{u}_{i0} + a_{2i}^u (x - x_i) + a_{3i}^u (y - y_i) + a_{4i}^u (z - z_i), \\ \bar{v}_i(\mathbf{x}) &= \bar{v}_{i0} + a_{2i}^v (x - x_i) + a_{3i}^v (y - y_i) + a_{4i}^v (z - z_i), \\ \bar{w}_i(\mathbf{x}) &= \bar{w}_{i0} + a_{2i}^w (x - x_i) + a_{3i}^w (y - y_i) + a_{4i}^w (z - z_i)\end{aligned}\tag{2.10}$$

다음과 같이 정리하여 표현할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}_{i0} + \mathbf{Q}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i),$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{i0} = [\bar{u}_{i0} \quad \bar{v}_{i0} \quad \bar{w}_{i0}]^T, \quad \mathbf{x}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} a_{2i}^u & a_{3i}^u & a_{4i}^u \\ a_{2i}^v & a_{3i}^v & a_{4i}^v \\ a_{2i}^w & a_{3i}^w & a_{4i}^w \end{bmatrix}$$

$\bar{\mathbf{u}}_{i0}$ 는 절점 i 에서의 변위 벡터이고, $\mathbf{x}_i$ 는 절점 i 의 위치 벡터이며, $\mathbf{Q}_i$ 는 계수행렬을 나타낸다. 이를 식 (2. 4)에 대입하면 변위 필드는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{u}(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{h}_i(r, s, t) \bar{\mathbf{u}}_{i0} + \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}_i(r, s, t) \hat{\mathbf{u}}_i \quad (2.12)$$

첫 번째 항은 절점 변위를 사용하는 표준 유한요소 근사를 나타내며, 두 번째 항은 $\mathbf{Q}_i$ 의 계수를 통해 추가 자유도(Degree of Freedom)을 도입한다. 이러한 추가 항은 해 공간(Solution Field)를 확장하여, 단순한 절점 변위로는 충분히 표현되지 않는 굽힘이나 전단과 같은 더 복잡한 변형 거동을 요소가 포착할 수 있도록 한다. 표기법을 단순화하기 위해 다음과 같이 확장된 형상 함수 행렬을 사용한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i(r, s, t) &= h_i(r, s, t) \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{H}_i(r, s, t) = \hat{\mathbf{h}}_i \otimes \mathbf{I}_3 \\ \hat{\mathbf{h}}_i &= [\hat{h}_i^x \quad \hat{h}_i^y \quad \hat{h}_i^z], \\ \hat{h}_i^x &= h_i(r, s, t)(x - x_i), \\ \hat{h}_i^y &= h_i(r, s, t)(y - y_i), \\ \hat{h}_i^z &= h_i(r, s, t)(z - z_i) \end{aligned} \quad (2.13)$$

여기서 $\mathbf{I}_3$ 는 3×3 단위 행렬이며, $\otimes$ 는 텐서 곱을 나타낸다. 이를 이용하여 변위 필드는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} a_{2i}^u & a_{3i}^u & a_{4i}^u & a_{2i}^v & a_{3i}^v & a_{4i}^v & a_{2i}^w & a_{3i}^w & a_{4i}^w \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

PU 기반 변위 보간을 사용할 때, 함수 간의 선형 종속성을 피하기 위해 경계에서의 모든 추가 자유도를 제거하는 방식이 적용된다 [21, 24]. 고차 다항식 근사를 통해 초탄성 구조물의 체적 잠금 문제를 해결하여 비선형 구조해석에서의 해의 정확도를 높일 것으로 예상된다.

3. 초탄성 재료 비선형 Partition of Unity 유한요소

선형 탄성 재료는 응력-변형의 관계가 선형적이며 작은 변형에만 적용할 수 있다는 한계를 가진다. 이에 반해, 초탄성 재료는 큰 변형을 수반하는 경우에도 탄성 거동을 유지하므로, 고무, 엘라스토머, 생체조직 등과 같이 큰 변형을 경험하며 비선형 응력-변형 거동을 보이는 재료를 정확하게 모델링 할 수 있다.

본 절에서는 초탄성 재료의 거동을 모델링하기 위해 변형률 에너지 밀도 함수 (Strain Energy Density Function)를 기반으로 Nearly-Incompressible 성질을 가지는 Mooney-Rivlin [30]과 Neo-Hookean [31] 초탄성 재료모델을 도입하고, 이에 대한 구성 텐서(Constitutive Tensor)와 Second Piola-Kirchhoff 응력 텐서를 도출한다. 초탄성 재료모델을 고려한 PU 기반 유한요소의 대변위 운동학을 다루기 위해 Total Lagrangian 공식을 유도하고, 가상일의 원리(Principle of Virtual Work, PVW)를 적용하여 평형 방정식을 선형화하는 과정을 제시한다.

3.1. 초탄성 재료 모델링

3.1.1. Rubber-Like 초탄성 재료의 구성 모델

고무와 같은 초탄성 재료를 모델링할 때는, 외부 하중에 의해 발생하는 변형으로 물체 내부에 축적되는 단위 변형 에너지를 함수 형태를 표현한 ‘변형 에너지 밀도 함수’를 주로 사용한다 [32]. 이 중에서도 Mooney-Rivlin과 Neo-Hookean 모델을 가장 널리 쓰이는

초탄성 재료 모델로 꼽힌다. 이들 모델에서 변형 에너지 밀도 함수는 오른쪽 Cauchy-Green 변형 텐서 ${}'_0\mathbf{C}$ 의 불변량(Invariants) ${}_0'I_1$, ${}_0'I_2$, ${}_0'I_3$ 통해 정의된다.

$${}_0'I_1 = \text{tr}({}'_0\mathbf{C}), \quad {}_0'I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}({}'_0\mathbf{C}))^2 - \text{tr}({}'_0\mathbf{C})^2 \right], \quad {}_0'I_3 = \det {}'_0\mathbf{C} \quad (3.1)$$

여기서 $\text{tr}(\cdot)$ 는 대각 성분의 합을 의미하며, $\det(\cdot)$ 는 정사각 행렬을 행렬식으로 반환하는 연산자이다. 왼쪽 첨자 윗첨자 t 는 현재 시간을 뜻하며, 왼쪽 아래 첨자 0는 기준 시간을 나타낸다. 도서 'Finite Element Procedures'의 표기법을 따르며, 비선형 해석에서 시간에 따른 변화를 표현하는 데 사용된다 [9]. 세 가지 불변량을 사용하여 변형 에너지 밀도의 일반적인 형태는 다음과 같은 다항식으로 정의될 수 있다.

$${}_0'W({}'_0I_1, {}'_0I_2, {}'_0I_3) = \sum_{m+n+k}^{\infty} A_{mnk} ({}_0'I_1 - 3)^m ({}_0'I_2 - 3)^n ({}_0'I_3 - 1)^k \quad (3.2)$$

여기서 A_{mnk} 는 재료의 물성에 따라 결정되는 계수이다. 일반적으로 재료의 변형은 체적 변형(Volumetric Deformation) 성분과 형상 변형(Distortional Deformation) 성분으로 분해될 수 있다. 비압축성 재료일 경우, 체적 변형이 발생하지 않으므로($I_3 = 1$) 체적 성분은 제거되고, 변형 에너지 밀도는 첫 번째 두 불변량에 의해서만 결정된다. 따라서 비압축성 재료의 변형 에너지 밀도 함수는 다음과 같이 정의된다.

$${}_0'W({}'_0I_1, {}'_0I_2) = \sum_{m+n+k}^{\infty} A_{mnk} ({}_0'I_1 - 3)^m ({}_0'I_2 - 3)^n \quad (3.3)$$

Neo-Hookean은 첫 번째 불변량 ${}_0'I_1$ 에 대한 단일 계수 A_{10} 만을 사용하며, 다른 계수들은 모두 0으로 설정된다. 따라서 변형되지

않는 상태를 기준으로 변형 에너지 밀도 함수는 다음과 같이 표현된다.

$${}_0W({}_0^tI_1) = A_{10}({}_0^tI_1 - 3) \quad (3.4)$$

여기서 A_{10} 는 물질 상수이며, 첫 번째 불변량 ${}_0^tI_1$ 은 변형 텐서의 첫 번째 불변량이다. 그러나 ${}_0^tI_1$ 은 대각 성분의 합(식(3.1) 참조)으로 구성되어 있어 전단 변형에서 발생하는 비선형 거동을 제대로 설명하지 못하는 한계가 있다 [11]. Mooney-Rivlin 모델은 두 번째 불변량 I_2 를 추가로 고려하여, 전단 변형 시 나타나는 재료의 비선형 거동을 좀 더 정확히 묘사한다.

$${}_0W({}_0^tI_1) = A_{10}({}_0^tI_1 - 3) + A_{01}({}_0^tI_2 - 3) \quad (3.5)$$

여기서 A_{10} 와 A_{01} 은 물질 상수이고, 첫 번째 불변량 ${}_0^tI_1$ 과 ${}_0^tI_2$ 는 각각 변형 텐서의 첫 번째와 두 번째 불변량을 나타낸다.

본 연구에서는 Neo-Hookean과 Mooney-Rivlin 모델을 채택하고 비선형 해석에서의 초탄성 거동을 분석하였다.

3.1.2. Nearly-Incompressible 초탄성 재료

푸아송 비(Poisson's Ratio)가 0.5에 정확히 달하는 재료는 변형 시 부피 변화가 전혀 일어나지 않는 비압축성 상태를 보인다 [11]. 이는 해석 과정에서 폐쇄형 해(Closed-form Solution)를 유도하기에 유리하지만, 실제 생체조직이나 고무 같은 물질은 푸아송 비가 0.5에 가깝더라도 약간의 압축성이 존재한다 [33].

이러한 Nearly-Incompressible 재료를 모델링 할 때는 Penalty 방법을 도입하여, 수압성 압력(Hydrostatic Pressure)과 부피 변형

간의 관계를 정의함으로써 실제 거동을 보다 정확히 표현할 수 있다. 재료가 팽창(Dilatation)할 때 강성이 크고, 뒤틀림(Distortion)에는 유연하게 반응하는 특성을 정확히 반영하는 특성을 반영하기 위해서는 뒤틀림과 부피 변형을 분리해 해석해야 한다. 이를 위해 오른쪽 Cauchy-Green 변형 텐서 ${}^t_0\mathbf{C}$ 의 불변량들(식 (3. 1) 참고)에서, t_0J_1 , t_0J_2 , t_0J_3 로 정의되는 감소된 불변량(Reduced Invariants)을 도입한다.

$${}^t_0J_1 = {}^t_0I_1 / {}^t_0I_3^{1/3}, {}^t_0J_2 = {}^t_0I_2 / {}^t_0I_3^{2/3}, {}^t_0J_3 = {}^t_0I_3^{1/2} \quad (3. 6)$$

순수한 팽창 상황에서 t_0J_1 와 t_0J_2 는 일정하게 유지되며, 오직 뒤틀림 변형에만 관련된다. 반면 t_0J_3 는 부피 변형과 관련이 된다[11]. 감소된 불변량을 사용하면 변형 에너지 밀도에서 부피 변형에 대한 효과를 분리하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$${}^t_0\tilde{W}({}^t_0J_1, {}^t_0J_2, {}^t_0J_3) = {}^t_0\tilde{W}_1({}^t_0J_1, {}^t_0J_2) + {}^t_0\tilde{W}_2({}^t_0J_3) \quad (3. 7)$$

여기서 ${}^t_0\tilde{W}_1({}^t_0J_1, {}^t_0J_2)$ 는 뒤틀림 변형 에너지 밀도를 나타내고, ${}^t_0\tilde{W}_2({}^t_0J_3)$ 는 부피 변형 에너지 밀도를 나타낸다. 뒤틀림 변형 에너지 밀도는 감소된 불변량을 사용하여 다음과 같이 정의된다.

$${}^t_0\tilde{W}_2({}^t_0J_3) = \frac{\kappa}{2}({}^t_0J_3 - 1)^2 \quad (3. 8)$$

여기서 κ 는 벌크 모듈러스이다. Mooney-Rivlin 재료의 경우 재료 상수 A_{10} 와 A_{01} 를 사용하여 뒤틀림 변형 에너지 밀도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$${}^t_0\tilde{W}_1({}^t_0J_1, {}^t_0J_2) = A_{10}({}^t_0J_1 - 3) + A_{01}({}^t_0J_2 - 3) \quad (3. 9)$$

$A_{10} = 0$ 이 될 때, Neo-Hookean 재료 모델로 단순화된다.

$${}'_0\tilde{W}_1({}'_0J_1) = A_{10}({}'_0J_1 - 3) \quad (3.10)$$

이 경우, ${}_0\tilde{W}_1$ 는 팽창과 독립적이고 체적 변형은 ${}_0\tilde{W}_2$ 에만 관련이 되며, 정수압 ${}'_p$ 는 ${}_0\tilde{W}_2$ 에 대한 ${}_0J_3$ 의 미분으로 정의된다.

$${}'_p \approx \frac{\partial {}'_0\tilde{W}({}'_0J_1, {}'_0J_2, {}'_0J_3)}{\partial {}'_0J_3} = \frac{\partial {}'_0\tilde{W}_2({}'_0J_3)}{\partial {}'_0J_3} = \kappa({}'_0J_3 - 1). \quad (3.11)$$

Green-Lagrange 변형률 텐서에 대해 미분하면 Mooney-Rivlin 재료에 대한 Second Piola-Kirchhoff 응력은 다음과 같이 구해진다.

$${}'_0S_{ij} = A_{10} \frac{\partial {}'_0J_1}{\partial {}'_0\epsilon_{ij}} + A_{01} \frac{\partial {}'_0J_2}{\partial {}'_0\epsilon_{ij}} + \kappa \frac{\partial ({}_0J_3 - 1)}{\partial {}'_0\epsilon_{ij}} \quad (3.12)$$

4차 구성 텐서 ${}^{t+\Delta t}D_{ijrs}$ 는 (3.12)의 Second Piola-Kirchhoff 응력을 미분하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} {}_0D_{ijrs} &= \frac{{}'_0S_{ij}}{\partial {}'_0\epsilon_{ij}} = A_{10} \frac{\partial^2 {}'_0J_1}{\partial {}'_0\epsilon_{ij} \partial {}'_0\epsilon_{rs}} + A_{01} \frac{\partial^2 {}'_0J_2}{\partial {}'_0\epsilon_{ij} \partial {}'_0\epsilon_{rs}} \\ &\quad + \kappa \frac{\partial ({}_0J_3 - 1)}{\partial {}'_0\epsilon_{ij}} \frac{\partial {}'_0J_3}{\partial {}'_0\epsilon_{rs}} + \kappa \frac{\partial {}'_0J_3}{\partial {}'_0\epsilon_{ij}} \otimes \frac{\partial {}'_0J_3}{\partial {}'_0\epsilon_{rs}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$A_{10} = 0$ 일 때 Neo-Hookean 재료 모델이 대한 Second Piola-Kirchhoff 응력과 4차 구성 텐서로 축소된다.

Nearly-Incompressible 재료 모델은 큰 탄성 변형을 설명할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 유한 요소 해석에서 푸아송 비가 높은 재료를 저차 요소로 모델링할 경우 체적잠김이 발생해 재료 강도가 과대평가되는 문제가 생길 수 있다. 이를 방지하기 위해서는 본 연구에서는 4절점 사면체 요소에 PU 근사법(2차 변위 보간)을 적용하여 체적잠김을 완화하고 해석 정확도를 높이고자 한다.

3. 2. 대변위 운동학

본 절에서는 PU근사를 통한 확장된 변위장을 고려하여 대변위 운동학을 설명하기 위해 Total Lagrangian 공식을 사용한다. Total Lagrangian 정식화는 변형이 시작되기 전의 초기 상태를 기준으로 하여 비선형 변위와 변형률을 계산할 수 있는 방법으로, 대변위 문제에서 나타나는 비선형 운동학을 효과적으로 반영할 수 있다 [9]. 이 과정에서 가상일의 원리(Principle of Virtual Work, PVW)를 적용하고, 평형 방정식을 선형하는 방법을 제시한다.

3.2.1. Total Lagrangian 정식화

이 절에서는 Total Lagrangian 정식화를 사용한 대변형 운동학(Large Deformation Kinematics)을 기술하는 수식을 논의한다. 표준 유한요소법과 달리, 본 접근 방식은 PU 방법을 통해 변위 함수를 정의함으로써 변위장 표현의 정확도를 높일 수 있다. 그림 (3. 1)은 직교 좌표계에서 초기(time 0), 마지막으로 계산된(time t), 그리고 현재 변형(time $t + \Delta t$) 상태를 정의한다. 여기서 왼쪽 위 첨자는 도메인의 구성 상태를 의미한다.

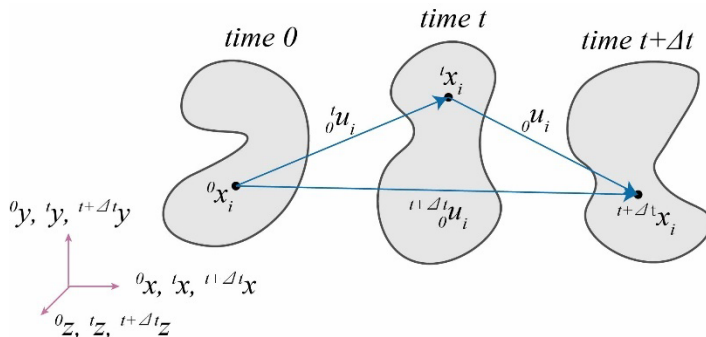


Fig. 3. 1 Definition of initial (time 0), last calculated (time t), and current deformed (time $t + \Delta t$) configurations in the Cartesian coordinate system

Total Lagrangian 정식화에서는 변형 상태를 나타내기 위해 변형 구배 텐서(Deformation Gradient Tensor, ${}^tF_{i,j}$)를 다음과 같이 정의한다.

$${}^tF_{i,j} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^0 x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^0 x_j} = \delta_{ij} + {}^t u_{i,j} \quad (3.14)$$

여기서 δ_{ij} 는 항등 텐서(Identity Tensor) 성분으로 크로네커

델타($i = j$ 일 때 $\delta_{ij} = 1$, 이외는 $\delta_{ij} = 0$)이다. ${}^t u_{i,j} = \frac{\partial ({}^0 \bar{u}_i + {}^0 \hat{u}_i)}{\partial x_j}$ 는

변위 구배(Displacement Gradient)로서, 기존 유한요소의 변위 필드 ${}^0 \bar{u}$ 와 PU 방법으로 추가된 변위 필드 ${}^0 \hat{u}_i$ 를 모두 포함한다. 오른쪽 Cauchy-Green 텐서는 변형 구배 텐서의 내적으로 정의된다.

$${}^t C_{ij} = {}^t F_{ki} {}^t F_{kj} \quad (3.15)$$

위 식을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^t C_{ij} &= (\delta_{ki} + {}^t u_{k,i})(\delta_{kj} + {}^t u_{k,j}) \\ &= \delta_{ki} \delta_{kj} + \delta_{ki} \delta_{k,j} + {}^t u_{k,i} \delta_{kj} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j} \end{aligned} \quad (3.16)$$

각 항을 개별적으로 분리하여 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$${}^t C_{ij} = \delta_{ij} + {}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j} \quad (3.17)$$

Green-Lagrange 변형률 텐서는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
{}^t_0\mathcal{E}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} + {}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j} - \delta_{ij} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j} \right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

변형률은 시간 t 에서 $t + \Delta t$ 로 변화하는 상태를 포함해야 하므로, 시간 t 에서의 변형률을 기준으로 시간 $t + \Delta t$ 시점의 변형률은 다음과 같이 나타낸다.

$${}^{t+\Delta t}_0\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t}_0u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}_0u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}_0u_{k,i} {}^{t+\Delta t}_0u_{k,j} \right) \tag{3.19}$$

총 변형률은 시간 t 에서의 변형률과, 그 이후 ($t + \Delta t$)에 추가된 변형률로 나누어 쓸 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}_0\mathcal{E}_{ij} = {}^t_0\mathcal{E}_{ij} + {}_0\mathcal{E}_{ij} \tag{3.20}$$

식 (3.20)을 식 (3.18)에 대입하여 전개하면 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t}_0\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t_0u_{i,j} + {}_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}_0u_{j,i} + \left({}^t_0u_{k,i} + {}_0u_{k,i} \right) \left({}^t_0u_{k,j} + {}_0u_{k,j} \right) \right) \tag{3.21}$$

최종적으로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}_0\mathcal{E}_{ij} &= {}^t_0\mathcal{E}_{ij} + \frac{1}{2} \left({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,j} {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,j} {}^t_0u_{k,j} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left({}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

여기서 선형 파트와 비선형 파트로 나눠 정리할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}_0\mathcal{E}_{ij} = {}^t_0\mathcal{E}_{ij} + {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \tag{3.23}$$

${}_0e_{ij}$ 는 선형 변형률 항으로 다음과 같이 정의된다.

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j} \right) \tag{3.24}$$

선형 변형률-변위 관계는 매트릭스 형태로 표현할 수 있다. ${}^t_0\mathbf{B}$ 는

선형 변형률-변위 행렬이고, $\mathbf{U}$ 는 절점 변위 벡터의 증가분이다. 이때, $\mathbf{U}$ 는 표준 절점 변위 벡터 $\bar{\mathbf{u}}_i$ 와 PU로 인해 증분된 절점 변위 벡터 $\hat{\mathbf{u}}_i$ 를 모두 포함한다.

$${}_0\mathbf{e} = {}^t_0\mathbf{B}_L \mathbf{U} \quad (3.25)$$

$${}^t_0\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 x} F_{11} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 x} F_{21} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 x} F_{31} \right]_{i=1}^{16} \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 y} F_{12} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 y} F_{22} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 y} F_{32} \right]_{i=1}^{16} \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 z} F_{13} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 z} F_{23} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 z} F_{33} \right]_{i=1}^{16} \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 x} F_{12} + \frac{\partial N_i}{\partial^0 y} F_{11} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 x} F_{22} + \frac{\partial N_i}{\partial^0 y} F_{21} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 x} F_{32} + \frac{\partial N_i}{\partial^0 y} F_{31} \right]_{i=1}^{16} \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 y} F_{13} + \frac{\partial N_i}{\partial^0 z} F_{12} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 y} F_{23} + \frac{\partial N_i}{\partial^0 z} F_{22} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 y} F_{33} + \frac{\partial N_i}{\partial^0 z} F_{32} \right]_{i=1}^{16} \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 x} F_{13} + \frac{\partial N_i}{\partial^0 z} F_{11} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 x} F_{23} + \frac{\partial N_i}{\partial^0 z} F_{21} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial^0 x} F_{33} + \frac{\partial N_i}{\partial^0 z} F_{31} \right]_{i=1}^{16} \end{bmatrix}$$

이 정식화에서 N_i 는 각 노드 i 에 대응하는 형상 함수이고, F_{jk} 는 변형 구배 텐서의 성분이다. $\frac{\partial N_i}{\partial^0 x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial^0 y}$, $\frac{\partial N_i}{\partial^0 z}$ 은 공간 구배 (Spatial Gradient)를 나타낸다. 형상 함수의 벡터 $\mathbf{N}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots \ N_{14} \ N_{15} \ N_{16}] \quad (3.26)$$

여기서 형상 함수는 각 노드가 표준 보간 함수와 PU에 의해 추가된 형상 함수를 모두 포함하도록 구성된다. 각노드 n 에 대응하는 형상 함수는 다음과 같이 정의된다.

표준 형상 함수: $N_n = h_n$ (3. 27)

PU 기반 형상함수: $N_{n+4} = \hat{h}_n^x$, $N_{n+8} = \hat{h}_n^y$, $N_{n+12} = \hat{h}_n^z$

이 표기법에서 h_n 은 노드 n 에 대응하는 표준 보간 함수이다. $\hat{h}_i^x$, $\hat{h}_i^y$, $\hat{h}_i^z$ 은 PU 방법으로 식 (2. 13)에서 구성된 x -방향, y -방향, z -방향에서 확장된 형상함수이다. 이와 같이 형상 함수를 구성함으로써, 각 노드는 근사 공간(Approximation Space)에 대해 표준 형상 함수와 세가지 공간 방향에서의 추가된 형상 함수를 포함하게 된다. 이를 통해 유한요소 모델은 복잡한 변위장을 효과적으로 표현할 수 있다.

비선형 변형률 성분 ${}_0n_{ij}$ 는 이차 항을 고려하여 다음과 같이 정의된다.

$${}_0n_{ij} = \frac{1}{2}({}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j}) \quad (3. 28)$$

행렬 형태로 비선형 변형률은 다음과 같이 표현된다.

$${}_0\boldsymbol{\eta} = \mathbf{U}^T {}^t_0\mathbf{B}_{\text{NL}} \mathbf{U} \quad (3. 29)$$

여기서 ${}^t_0\mathbf{B}_{\text{NL}}$ 는 비선형 변형률-변위 행렬(Nonlinear Strain-Displacement Matrix)로, 변위 구배의 이차 항을 포함하여 큰 변형을 효과적으로 포착한다. PU 근사 기법으로 강화된 4-절점 사면체 요소에 대해 비선형 변형률-변위 행렬 ${}^t_0\mathbf{B}_{\text{NL}}$ 은 다음과 같이 구성된다.

$${}^t_0\mathbf{B}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}} \end{bmatrix} \quad (3. 30)$$

여기서 ${}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}}$ 은 다음과 같이 구성된다.

$${}^t\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial N_i}{\partial {}^0x} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial {}^0y} \right]_{i=1}^{16} & \left[\frac{\partial N_i}{\partial {}^0z} \right]_{i=1}^{16} \end{bmatrix}^T \quad (3.31)$$

이와 같이 형상 함수를 구성함으로써, 각 노드는 세 가지 공간 방향에서 표준 및 강화된 보간 함수를 모두 포함하여 기여한다. 이는 유한요소 모델 내에서 비선형 변형 거동을 정확히 포착할 수 있도록 보장한다. 변위 증분 $\delta \mathbf{U}$ 에 대한 선형 및 비선형 변형률의 변화는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta {}_0e_{ij} = {}^t\mathbf{B}_{\text{L},ij}\delta \mathbf{U} \quad \text{and} \quad \delta {}_0\eta_{ij} = \delta \mathbf{U}^T {}^t\mathbf{B}_{\text{NL},ij}\delta \mathbf{U}. \quad (3.32)$$

이 표현식들은 비선형 유한요소 방정식에서 내부 힘 벡터(Internal Force Vector)와 탄젠트 강성 행렬(Tangent Stiffness Matrix)를 공식화하는 데 사용된다.

3.2.2. 가상 일의 원리를 통한 평형 방정식

가상일의 원리는 역학적 평형 상태에서, 임의의 가상 변위가 주어졌을 때 내부에서 발생하는 가상 일과 외부에 의해 발생하는 가상일이 서로 상쇄되어 합이 0이 된다는 원리이다 [34]. 시간 t 에서의 구성(Configuration)을 알고 있다고 가정하면, 각 로드스텝 Δt 에 대해 시간 $t + \Delta t$ 에서의 가상 일의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} d{}^0V - {}^{t+\Delta t}W = 0 \quad (3.33)$$

여기서 0V 는 초기 부피(Initial Volume)이며, ${}^{t+\Delta t}W$ 는 적용된 표면하중 및 체적력(Body Force)으로 의해 발생하는 외부 가상 일이다. ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ 는 시간 $t + \Delta t$ 에서의 Second Piola-Kirchhoff 응력

텐서이고, $\delta^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ij}$ 는 시간 $t + \Delta t$ 에서의 Green-Lagrange 변형률의 가상 변형률로서 모두 초기(time = 0) 상태를 기준으로 한다.

응력 텐서는 식(3. 12)에서 제시된 Nearly Incompressible 초탄성 재료 모델의 변형률 에너지 밀도 함수에 기반하여 도출되며, 수식 전개를 위해 응력 텐서와 변형률 텐서를 아래와 같이 분해한다.

$${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} = {}^t_0 S_{ij} + {}_0 S_{ij} \quad (3. 34)$$

여기서 ${}^t_0 S_{ij}$ 는 초기 상태에 대한 Second Piola-Kirchhoff 응력 텐서이고, ${}_0 S_{ij}$ 는 시간 증가 Δt 동안의 Second Piola-Kirchhoff 응력 텐서를 나타낸다.

$$\delta^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ij} = \delta_0^t \varepsilon_{ij} + \delta_0 \varepsilon_{ij} \approx \delta_0 e_{ij} + \delta_0 \eta_{ij} \quad (3. 35)$$

$\delta_0^t \varepsilon_{ij}$ 는 증분된 Green-Lagrange 변형률을 의미하지만 Δt 구간 내에서 일정하다고 볼 수 있으므로 시간 변화에 따른 추가 항은 0으로 처리될 수 있다. 식(3. 34)와 식(3. 35)를 식(3. 33)에 대입하면, 다음과 같은 평형 방정식을 얻는다.

$$\int_{\partial V} ({}^t_0 S_{ij} \delta_0 e_{ij} + {}^t_0 S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} + {}_0 S_{ij} \delta_0 e_{ij} + {}_0 S_{ij} \delta_0 \eta_{ij}) d^0 V = {}^{t+\Delta t} R \quad (3. 36)$$

이를 통해 시간 $t + \Delta t$ 에서의 평형 상태 재정의할 수 있으며, 각 로드 스텝마다 응력-변형률 관계를 누적하여 대변형 문제를 해석하게 된다.

3.2.3. 평형 방정식의 선형화

위 가상일의 원리로부터 유도된 비선형 평형 방정식(3. 36)은

비선형 항을 포함하고 있기 때문에 직접 해를 구하기가 어렵다. 이를 해결하기 위해, 응력과 변형률 사이의 관계를 선형화 한다. 식(3. 36)에서 비선형 항인 ${}_0S_{ij}\delta_0\eta_{ij}$ 을 무시하고, 구성 방정식이 선형 탄성체로 가정(${}_0S_{ij} \approx {}_0D_{ijrs}{}_0e_{is}$)하여 단순화한다. 그 결과, 내부 가상 일은 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\int_{0_V} \delta_0 e_{ij} {}_0D_{ijrs}{}_0e_{is} d^0V + \int_{0_V} {}_0'S_{ij}\delta_0\eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}W - \int_{0_V} {}_0S_{ij}\delta_0e_{ij} d^0V \quad (3. 37)$$

단일 요소를 기준으로 하면, 선형화된 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} ({}_0'\mathbf{K}_L + {}_0'\mathbf{K}_{NL})\mathbf{U} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}_0'\mathbf{F}, \\ {}_0'\mathbf{K}_L &= \int_{0_V} {}_0'\mathbf{B}_{ij}^T {}_0D_{ijkl} {}_0'\mathbf{B}_{L,kl} d^0V, \\ {}_0'\mathbf{K}_{NL} &= \int_{0_V} {}_0'\mathbf{N}_{NL,ij}^T {}_0'S_{ij} {}_0'\mathbf{B}_{NL,ij}^T d^0V, \\ {}_0'\mathbf{F} &= \int_{0_V} {}_0'\mathbf{B}_{L,ij}^T {}_0'S_{ij} d^0V \end{aligned} \quad (3. 38)$$

여기서 ${}_0'\mathbf{K}_L$ 는 선형 강성 행렬, ${}_0'\mathbf{K}_{NL}$ 는 비선형 강성 행렬이다. $\mathbf{U}$ 는 증분 변위 벡터를, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ 와 ${}_0'\mathbf{F}$ 는 각 외부 하중과 내부 반력을 나타낸다.

이러한 선형화된 평형 방정식을 풀기 위해서는 뉴턴-랩슨 방법을 적용한다. 뉴턴-랩슨 방법은 비선형 방정식에서 잔류 벡터(${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}_0'\mathbf{F}$)를 최소화하도록 반복(Iteration)하며, 각 반복 단계마다 강성 행렬과 잔류 하중을 재계산하여 증분 변위 벡터를 계산한다. 잔류 벡터가 충분히 작아져 평형 오차가 허용 범위 이내에 들 때까지 과정을 반복하며, 이를 통해 큰 변형과 비선형 재료 거동을 해석할 수 있다.

3.3. 초탄성 구조물의 비선형 정적해석

본 절에서는 개발된 PU 기반 4절점 사면체 요소(TET4E)의 비선형 정적 해석 성능을 검증하기 위해 수치예제를 제시한다. 이를 통해 TET4E 요소가 체적 잠금 문제를 완화하고 비선형 정적 거동을 얼마나 정확히 표현할 수 있는지 평가한다.

1. **다양한 푸아송 비를 가진 켄틸레버 빔의 체적 잠금:** 푸아송 비가 0.5에 가까워질 때 직사각 단면 빔에 모멘트를 가하여, 빔이 보이는 체적 거동을 비교 및 평가한다.
2. **압축 하중을 받는 초탄성 블록:** 초탄성 Nearly-Incompressible 재료로 이루어진 직육면체 블록에 수직 방향 압축하중을 가하여, 큰 변형 영역에서의 정확도를 검증한다.
3. **큰 굽힘 변형을 겪고 있는 초탄성 실린더:** 초탄성 Nearly-Incompressible 실린더에 Line Load를 가할 때 발생하는 굽힘 변형 거동을 분석한다.
4. **초탄성 블록의 메쉬 왜곡 민감도 분석:** 동일한 초탄성 블록에 불규칙한 메쉬(Distorted Mesh)를 생성하여 메쉬 품질이 해석 결과에 미치는 영향을 평가한다.
5. **압축 하중 하의 초탄성 타이어:** 초탄성 Nearly-Incompressible 타이어 구조에 수직 압축 하중을 가하여 변위 분포를 분석한다.

TET4E 요소는 기존 연구의 솔루션과 비교되었으며, 비교를 위해 사용된 유한요소와 문헌 출처는 Table 3. 1에 제시되어 있다.

Table 3. 1 List of finite elements for comparison

유한요소 타입	설명	참조
사면체 요소		
TET4	기본 4절점 사면체 유한요소	[9]
TET10	기본 10절점 사면체 유한요소	[9]
FS-T4	Face 기반 Smoothing 방법을 사용한 사면체 유한요소	[35]
CS-T4	Cell 기반 Smoothing 방법을 사용한 사면체 유한요소	[36]
ES-T4	Edge 기반 Smoothing 방법을 사용한 사면체 유한요소	[37]
bFS-T4	FS-T4 요소 기반 Bubble Function을 추가한 사면체 유한요소	[38]
T1P1	변위와 압력 모두 근사하는 사면체 유한요소	[39]
T1P1IM 3ST	비호환 모드를 사용하여 안정화된 선형 변위 및 압력을 갖는 사면체 유한요소	[39]
TET4E	본 연구에서 제시한 사면체 유한요소	—
육면체 요소		
HEXA8	기본 8절점 육면체 유한요소	[9]
Q2	2차 육면체 유한요소	[40]
Q1SP	안정화 기법과 평행육면체 개념을 적용한 8절점 육면체 유한요소	[41]
Q1R	감차 적분법이 적용된 8절점 육면체 유한요소	[17]
$\bar{F}Q2/Q1$	변위 필드와 2차 함수로 보간하고 압력 필드를 상수로 취급하는 혼합 유한요소	[40]
셸 요소		
NL Shell	요소 내에서 변형률을 개선된 형태로 가정하는 EAS 방법을 사용한 셸 유한요소	[40, 42]

3.3.1. 다양한 푸아송 비를 가지는 켄틸레버 빔의 체적 잠금

이 절에서는 푸아송 비를 변화시키며 팁 모멘트가 작용하는 선형 탄성 재료로 구성된 켄틸레버 빔에서 발생하는 체적잠금 현상을 분석한다. 푸아송 비가 0.4999 에 가까워질수록 기존의 4 절점 사면체 유한요소에서 체적잠금을 보이는 것은 잘 알려져 있다 [12]. 팁 모멘트가 가해지는 켄틸레버 빔(Fig. 3. 2 참조)은 단면 길이 $a = 2m$, 높이 $h = 3m$, 영률 $E = 300 \text{ GPa}$ 의 재료로 구성되어 있으며, 푸아송 비율은 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.49, 0.495, 그리고 0.499 로 점진적으로 증가한다. 본 수치 예제에서는 Coarse, Medium, Fine 의 세 가지 메쉬를 사용하여 해석을 수행하였으며, 사용된 메쉬 타입과 각 메쉬의 요소 및 절점 개수는

Table 3. 2 에 정리되어 있다.

Table 3. 2 Comparison of mesh types and number of elements/nodes by element type used in Example 3.3.1

이산화 수준	TET4 & TET4E		HEXA8	
	요소 수	절점 수	요소 수	절점 수
Coarse	1,824	500	304	500
Medium	3,450	864	575	864
Fine	5,832	1,372	864	1,372
Reference: TET10 요소 타입, 19,791 개 요소, 19,791 개 절점				

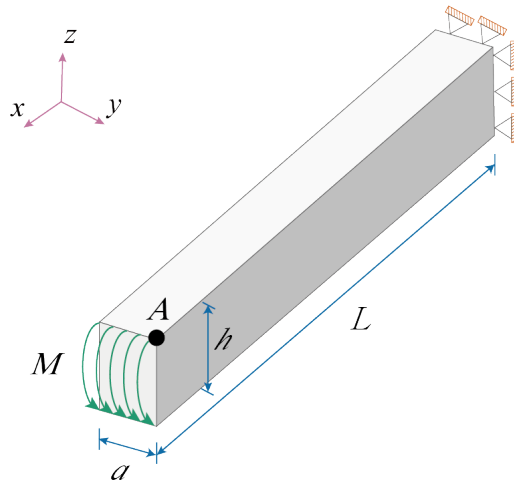


Fig. 3. 2 Cantilever beam subjected to moment loads
 $(E = 300 \text{ GPa}, L = 20 \text{ m}, a = 2 \text{ m}, h = 3 \text{ m}, M = 10 \text{ Nm})$

Fig. 3. 3 는 TET4, HEXA8, TET4E 요소의 다양한 푸아송 비에서 하중 단계(Load Step)에 따른 z - 방향 변위를 비교한 결과를 보여준다. TET4E 요소는 표준 TET4 및 HEXA8 요소에 비해 다양한 푸아송 비 조건에서 빔의 굽힘 거동을 보다 정확하게 재현하는 데 있어 큰 개선을 보였다. 특히 TET4 요소는 낮은 푸아송 비에서 Reference 값과 상당한 차이를 보였다. 반면, HEXA8 요소는 TET4 요소보다 더 나은 성능을 보였으나, 여전히 낮은 푸아송 비에서 차이가 나타났다. 이에 반해 TET4E 요소는 푸아송 비의 전체 범위에서 Reference 와 매우 일치하는 성능을 보여준다.

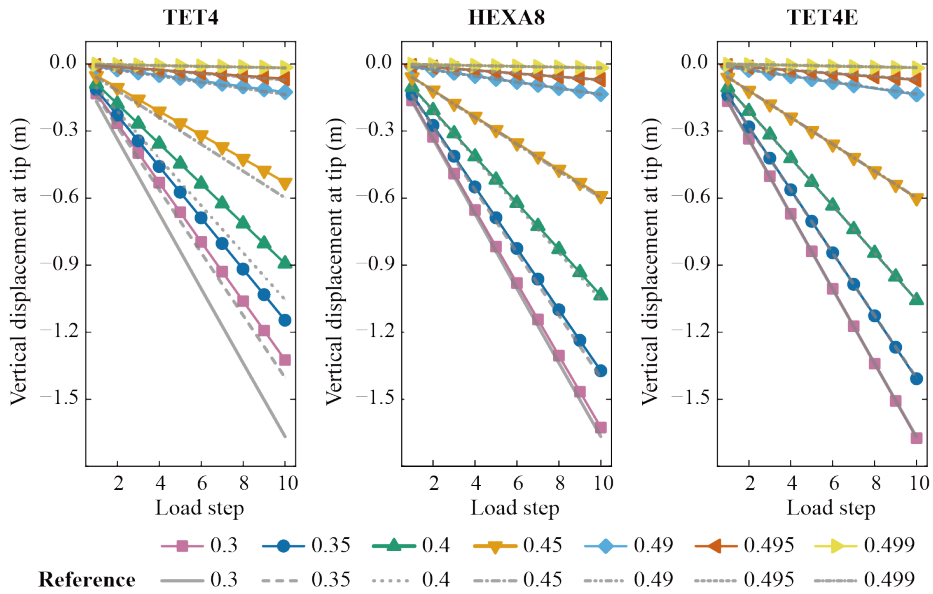


Fig. 3. 3 Calculated load–displacement curves at point A for the cantilever beam with varying Poisson's ratio

Fig. 3. 4은 TET4, HEXA8, TET4E 요소의 다양한 푸아송 비에 대해 서로 다른 메쉬 밀도에서 A 지점의 정규화된 변위를 비교한 것이다. 계산된 변위를 Reference으로 나누어 정규화된 변위를 구한다. TET4E 요소는 모든 푸아송 비와 메쉬 밀도에서 정규화된 변위가 Reference와 1%이내의 차이를 보이며, 체적잠김 영향을 거의 받지 않는 우수한 성능을 나타낸다. 반면 HEXA8 요소는 Coarse 메쉬에서 푸아송 비 0.499일 때 8.11%의 상대오차를 보이며 체적잠김 영향을 받지만, Medium과 Fine 메쉬에서는 각각 5.27%와 3.66%의 오차로 정확도가 향상된다. TET4 요소는 0.499에서 최소 11.68%의 오차를 나타내며, 메쉬 밀도를 증가시켜도 체적잠김 문제를 완전히 해결하지 못하는 한계를 보인다.

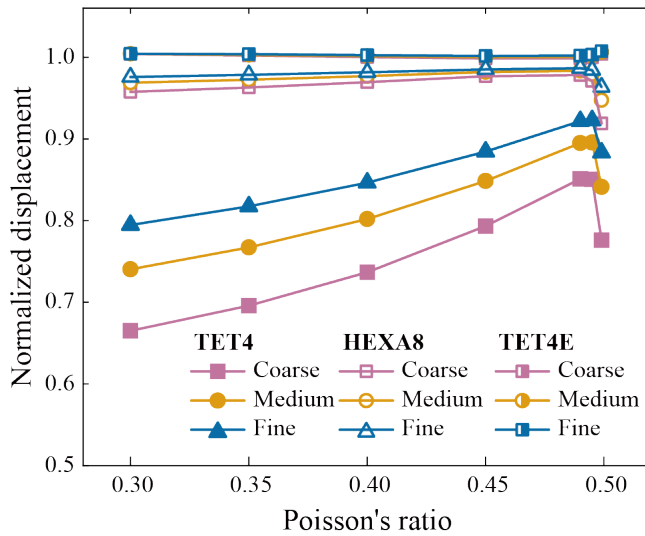


Fig. 3. 4 Comparison of normalized displacement for different elements with varying Poisson's ratio

Fig. 3. 5는 중간 메쉬에서 TET4E 요소의 변형 형상을 스케일 팩터 4를 적용하여 나타낸 것이다. 이 과정은 변형을 확대하여 보여주지만, 실제 계산되는 변위에는 영향을 미치지 않는다. 푸아송 비 0.3에서 0.499로 증가할수록 전체 변위는 감소하는 경향을 보인다.

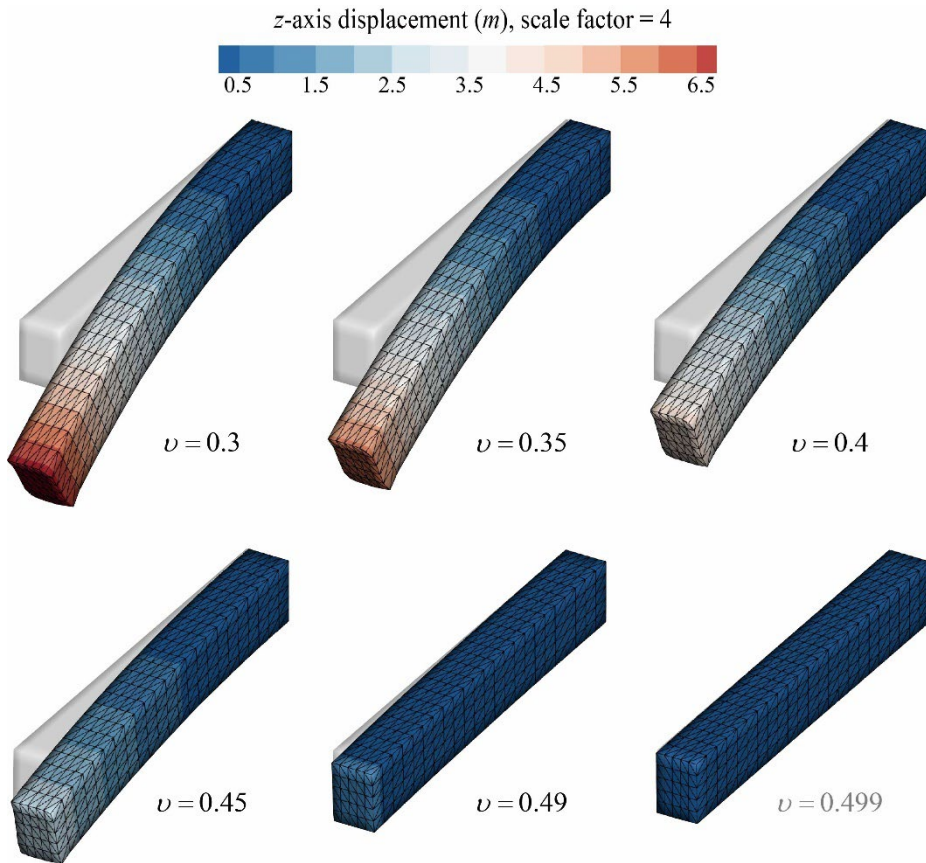


Fig. 3. 5 Deformed shapes of a cantilever beam composed of TET4E elements according to changes in Poisson' s ratio, with a scale factor of 4 applied

3.3.2. 압축 하중을 받는 초탄성 블록

상단에 압력이 가해지는 Nearly-Incompressible 초탄성 블록 문제는 체적잠금 현상을 완화하는 능력을 검증하고, 재료의 비선형 거동을 평가하는 대표적인 벤치마크 문제로 널리 사용된다 [17, 39, 43]. 이 블록의 한 변의 길이가 $L = 1 \text{ mm}$ 인 정육면체로, 상단 표면의 1/4에 압력이 가해진다. 대칭 조건을 만족하기 위해 수직면에는 대칭적인 Dirichlet 경계 조건이 적용되며, 상단 면은 수평 방향으로 움직이지 않도록 제약이 부여된다. 가해지는 압력 $p = 320 \text{ MPa}$ 는 10단계로 나누어 점진적으로 증가시킨다. 재료는 Neo-Hookean 모델로 구성되어 있으며, 물성값은 $A_{10} = 40.097 \text{ MPa}$, 체적 탄성 계수는 $k = 400,899,606 \text{ MPa}$ 이다. 본 수치 예제에서는 $N \times N \times N$ 요소 메쉬 ($N=4, 8, 16, 32$)를 사용하여 해석을 수행하였으며, 다양한 메쉬 밀도에서의 해석 결과를 Reference와 비교하였다. 사용된 메쉬의 분할 수와 절점 및 요소 수는 Table 3. 3에 기술되어 있다.

Table 3. 3 Mesh density and corresponding element and node counts used in example 3.3.2

	한 변당 요소의 개수 (N)			
	4	8	16	32
요소 수	568	2,893	14,300	114,400
절점 수	169	730	3,305	22,739
Reference: TET10 요소 타입, 105,810 개 요소, 72,797 개 절점 사용				

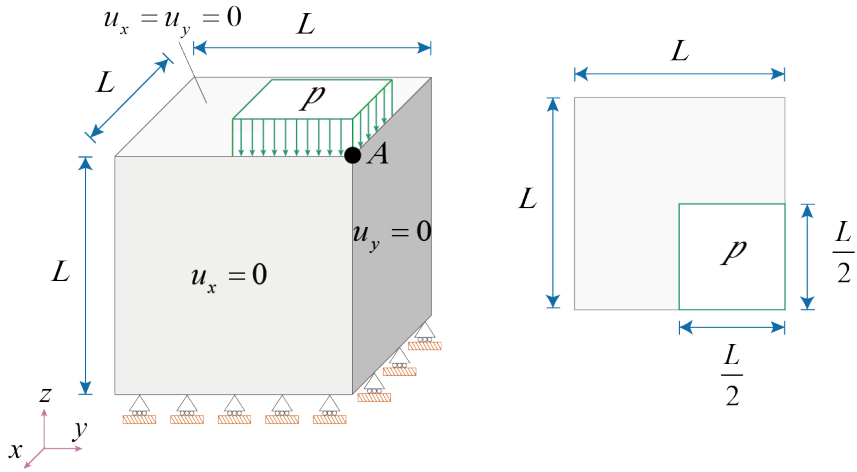


Fig. 3. 6 A nearly incompressible hyperelastic block under compression

($A_{10} = 40.097 \text{ MPa}$, $k = 400,889.806 \text{ MPa}$, $L = 1 \text{ mm}$, $p = 320 \text{ MPa}$)

Fig. 3. 7은 Q1R, T1P1, T1P1IM3ST, TET4, TET4E 요소에서 변당 나누어진 요소의 개수(N)에 따른 A 지점의 수직 변위를 비교한 결과를 보여준다. N 이 작을 경우, 모든 요소에서 계산된 수직 변위가 Reference와 차이를 보였으나, N 이 증가함에 따라 TET4E 요소는 체적잠김 현상을 효과적으로 완화하여, 다른 요소들보다 Reference에 더 빠르게 수렴하는 경향을 보였다.

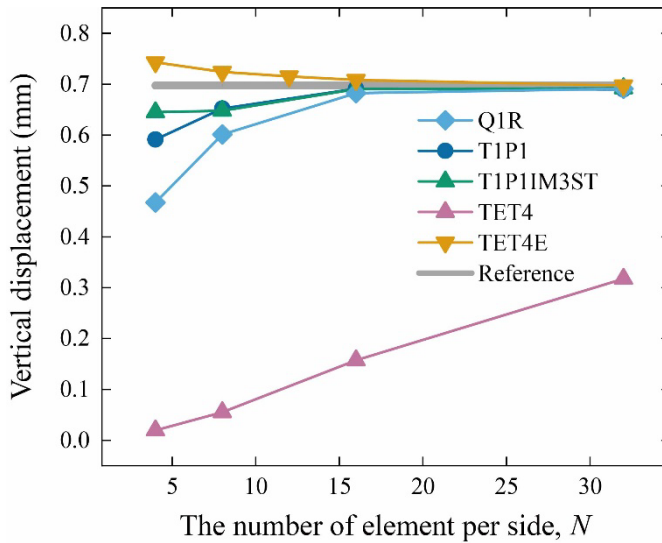


Fig. 3. 7 Convergence of vertical displacement at center point A

Fig. 3. 8 은 자유도가 증가함에 따라 HEXA8, TET10, TET4, TET4E 요소에서 A 지점의 수직 변위를 비교한 결과를 보여준다. HEXA8 요소는 자유도가 증가함에 따라 Reference 에 빠르게 수렴하는 경향을 보였으나, 높은 자유도에서도 완전히 Reference 에 도달하지는 못하는 한계를 보였다. TET4 요소는 자유도가 증가해도 Reference 와의 차이가 크게 줄어들지 않았다. TET10 요소는 약 15,000 자유도 이상에서 Reference 에 근접한 결과를 얻었으나, TET4E 요소는 약 4,000 자유도만으로도 Reference 에 근접한 결과를 도출했다. 이는 TET4E 요소가 체적 잠금을 효과적으로 완화하여 2 차 보간을 수행하는 TET10 요소보다 더 낮은 계산 비용으로도 높은 정확도를 제공할 수 있음을 보였다.

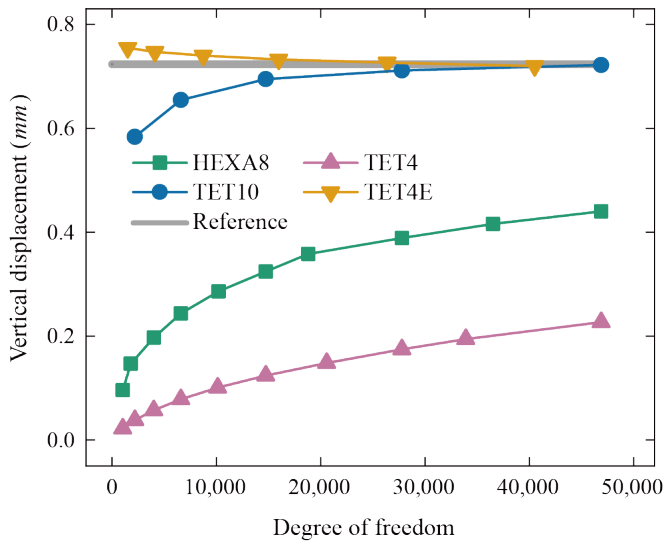


Fig. 3. 8 Vertical displacement a point A for differnent finite elements under compression of hyperelastic block with increasing DOF

Fig. 3. 9은 TET4E를 사용하여 압력 하중 320 MPa이 가해진 Nearly-Incompressible 초탄성 블록의 수직 변위 등고선(Contour)을 보여준다. 이 그림은 네 가지 다른 메쉬 밀도를 나타내며, 각 메쉬는 가해진 하중에 따른 블록 내부의 수직 변위 변화를 보여준다.

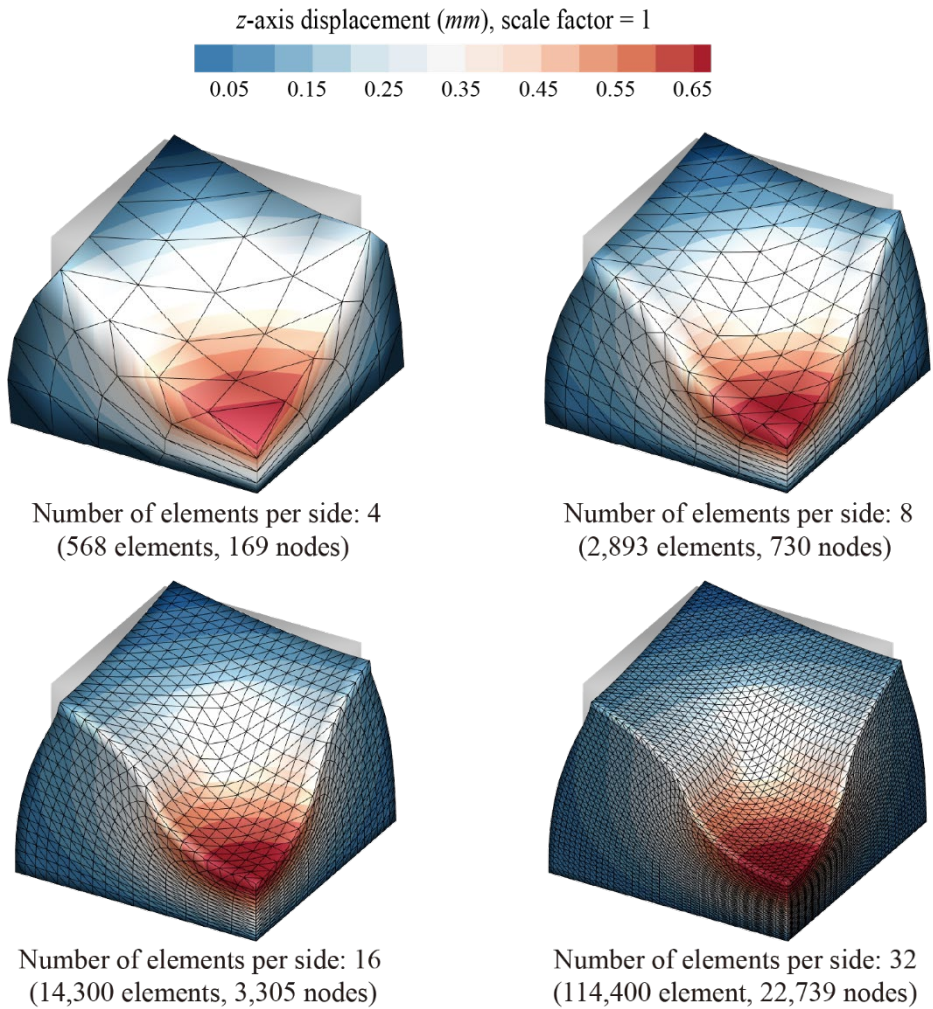


Fig. 3. 9 Deformed shapes of a block composed of TET4E elements under a pressure of 320 Mpa

3.3.3. 큰 굽힘 변형을 겪고 있는 초탄성 실린더

이 문제는 전단 잠금이 발생할 가능성이 있는 상황에서 유한 요소의 단면 변형 능력을 평가하는 데 널리 사용된다 [10, 42, 44]. 대칭 실린더의 치수는 길이 $L = 15\text{ cm}$, 두께 $t = 2\text{ cm}$, 반지름은 $R = 8\text{ cm}$ 이며, 선 하중(Line Load) $p = 75,000\text{ kN/cm}$ 은 10단계로 나누어 점진적으로 적용된다. 재료는 Neo-Hookean 모델로 구성되어 있으며, 물성값은 $A_{10} = 3,000\text{ kN/cm}^2$, 체적 탄성 계수는 $k = 280,000\text{ kN/cm}^2$ 이다. Coarse, Medium, Fine 메쉬 밀도를 사용하여 수렴 거동을 분석한 결과를 제시하며, 메쉬의 요소 및 절점 수는 다음과 같다.

- 거친 메쉬(Coarse): 1,171개의 요소, 435개의 절점,
- 중간 메쉬(Medium): 2,629개의 요소, 931개의 절점
- 정밀 메쉬(Fine): 53,13개의 요소, 1,618개의 절점
- Reference: TET10로 구성된 6,199개의 요소, 12,044개의 절점

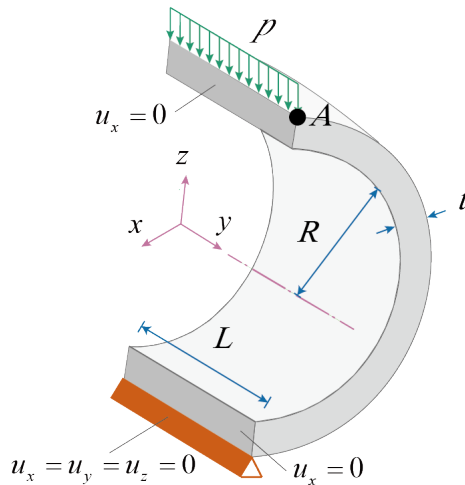


Fig. 3. 10 Thick symmetrical cylinder under line load
($A_{10} = 3,000\text{ kN/cm}^2$, $k = 280,000\text{ kN/cm}^2$, $L = 15\text{ cm}$, $t = 2\text{ cm}$, $R = 8\text{ cm}$)

Fig. 3. 11는 메쉬 밀도에 따른 Q2, $\bar{F}Q2/Q1$, Q1SP, NL Shell, TET4, TETE 요소의 A 지점에서의 수직 변위를 비교한 결과를 보여 준다. TET4 요소는 메쉬 밀도가 증가해도 Reference에 도달하지 못하는 한계를 보인다. 반면, PU 근사를 적용하여 개선된 TET4E 요소는 $N = 8$ 이상의 메쉬 밀도에서 Reference와의 차이가 10% 미만으로 감소하여, 다른 유한요소들에 비해 가장 우수한 성능을 보였다. 이는 PU 기반 유한요소가 전단 잠금을 효과적으로 완화하고 높은 정확성을 유지함으로써, 비선형 정적 해석에서도 신뢰성 있는 결과를 제공한다는 점을 보여준다.

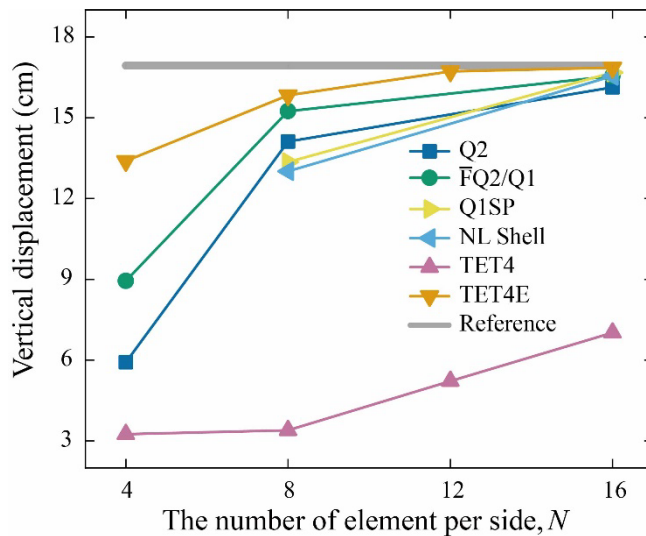


Fig. 3. 11 Convergence curve for the different elements with varying mesh densities

Fig. 3. 12은 TET4와 TET4E 요소를 사용하여 다양한 메쉬 밀도에서 하중 변화에 따른 A 지점에서의 수직 변위를 비교한 결과를 보여준다. TET4 요소는 메쉬 밀도가 증가함에 따라 성능이 개선되지만, 하중이 증가할수록 Reference와 차이가 점차 커지는 경향을 보인다. 특히, 낮은 메쉬 밀도($N = 4$)에서는 하중이 낮은 영역에서도 큰 오차가 발생하며, 메쉬를 세분화해도 Reference와의 차이를 완전히 해소하지 못하는 한계를 드러낸다. 반면, TET4E 요소는 동일한 조건에서 Reference와 매우 유사한 수직 변위를 예측한다. 낮은 메쉬 밀도($N = 4$)에서도 비교적 정확한 결과를 보이며, 하중이 증가해도 Reference와의 차이가 거의 나지 않는다. 이를 통해 TET4E 요소는 TET4 요소에 비해 정확한 비선형 거동 예측을 하여 정확한 해석 결과를 제공한다는 것을 보여준다.

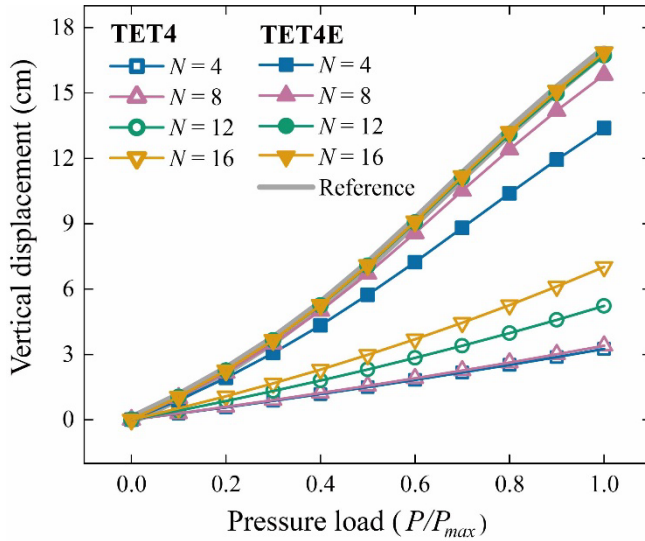


Fig. 3. 12 Load-displacement curves for the thick symmetrical cylinder at point A

Fig. 3. 13은 자유도가 증가함에 따라 HEXA8, TET10, TET4, TET4E 요소를 사용하여 *A*에서 계산된 수직 변위의 변화를 보여준다. HEXA8과 TET4 요소는 자유도가 증가함에 따라 수직 변위가 증가하여 Reference에 점차 근접하지만, 높은 자유도에서도 Reference에 완전히 도달하지 못한다. HEXA8 요소는 자유도 9,717에서 Reference의 81.3%을, TET4 요소는 자유도 10,419에서 약 65.9%의 값을 예측한다. 반면 TET4E과 TET10 요소는 매우 유사한 거동을 보이며, 낮은 자유도에서도 높은 정확도를 유지한다. TET10 요소는 자유도 4,445에서 Reference의 96.8%를 달성하였고, TET4E 요소는 자유도 4,140에서 95.7%에 해당하는 수직 변위를 예측한다. Nearly-Incompressible 초탄성 재료 구조물의 굽힘하중을 받는 상황에서 TET4E 요소는 10개의 결점을 가지고 2차 보간을 수행하는 TET10 요소와 유사한 성능을 보여준다.

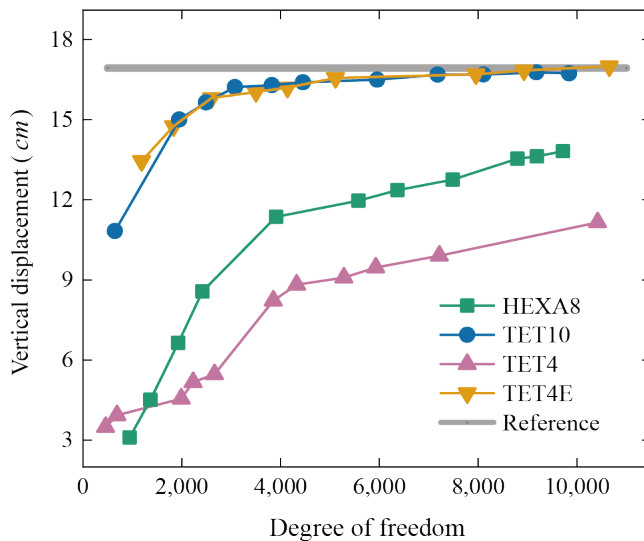


Fig. 3. 13 Vertical displacement at point *A* for different finite elements of cylinder undergoing large deformations with increasing DOF

Fig. 3. 14은 서로 다른 메쉬 밀도와 압력 하중 하에서 TET4E 요소를 사용한 대칭 실린더의 변형된 형상을 보여준다. 상단 행은 $P/P_{max} = 0.5$ 일 때, 메쉬 밀도 $N = 8, 12, 16$ 에서의 변형을 나타내며, 하단 행은 같은 메쉬 밀도에서 $P/P_{max} = 1.0$ 일 때의 변형을 보여준다. 등고선(Contour)은 z 축 방향 변위를 미터 단위로 나타내며, 색상은 z 방향 변위의 크기를 표현하고 있다.

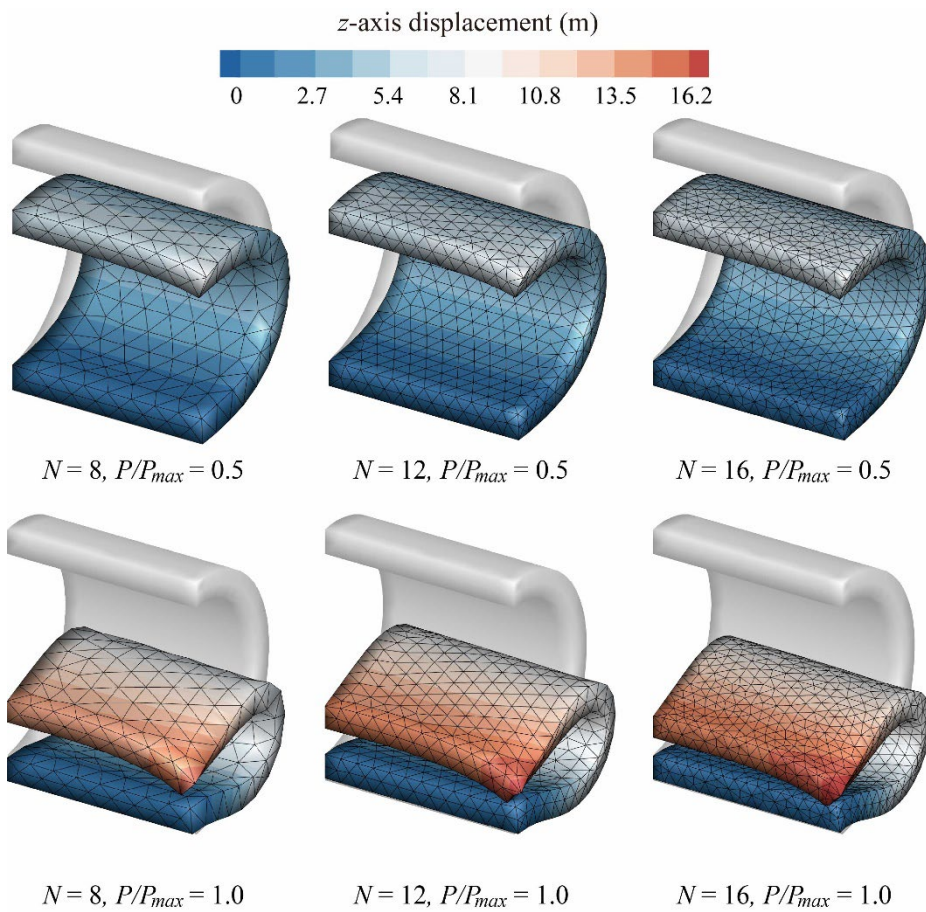


Fig. 3. 14 Deformed shapes of the cylindrical shell under different mesh densities and pressure loads

3.3.4. 초탄성 블록의 메쉬 왜곡 민감도 분석

유한요소 해석에서 메쉬가 왜곡되면 계산된 변위 및 응력의 정확도에 큰 영향을 미칠 수 있다 [45]. 특히 대변형 문제에서는 초기 메쉬에 왜곡이 없더라도 하중이 증가함에 따라 형상이 변화하면서 메쉬가 왜곡된다. 본 예제에서는 인위적으로 왜곡된 메쉬를 생성하여 왜곡 인자(Distortion Factor, α_{dist})가 해석 결과에 미치는 영향을 분석한다. 이를 위해 초기 위치에서 업데이트된 위치로 변경되는 메쉬의 각 좌표를 방정식을 통해 계산한다. 본 연구에서 사용된 방정식은 다음과 같다 [46].

$$\begin{aligned}x' &= x + r_c \alpha_{dist} \Delta x, \\y' &= y + r_c \alpha_{dist} \Delta y, \\z' &= z + r_c \alpha_{dist} \Delta z\end{aligned}\tag{3.39}$$

여기서 x , y , z 는 초기 위치를, x' , y' , z' 는 업데이트된 위치를 나타낸다. r_c 는 -1과 1 사이의 임의의 숫자이고, α_{dist} 는 왜곡 인자, Δx , Δy , Δz 는 각 방향에서의 요소 길이를 의미한다.

Fig. 3. 15은 한 변의 길이가 $L = 0.1 \text{ m}$ 인 블록 모델에 대해 상단에 압력 $P = 0.5 \text{ N/m}^2$ 가 가해지고, 하단은 고정된 경계 조건이 적용된 상태를 보여준다. 메쉬는 α_{dist} 는 0에서 0.4까지의 왜곡 인자를 적용하여 인위적으로 왜곡하였다. 사용된 재료 모델은 $A_{I0} = 0.5 \text{ Pa}$ 와 체적 탄성 계수 $k = 100 \text{ Pa}$ 가 적용된 Nearly-Incompressible 초탄성 Neo-Hookean 재료 모델을 사용한다. 본 수치 예제에서는 $N \times N \times N$ 요소 메쉬($N = 4, 8, 12, 16$)를 사용하여 해석을 수행하였으며, 다양한 메쉬 밀도에서의 해석 결과를 Reference와 비교하였다. 사용된 메쉬의 구체적인 노드 및 요소 수는 Table 3. 4에 기술되어 있다.

Table 3. 4 Mesh density and corresponding element and node counts used in example 3.3.4

	한 변당 요소의 개수 (N)			
	4	8	12	16
요소 수	781	3,433	9,234	17,414
절점 수	210	815	2,086	3,816
Reference: TET10 요소 타입, 24,000 개 요소, 36,461 개 절점 사용				

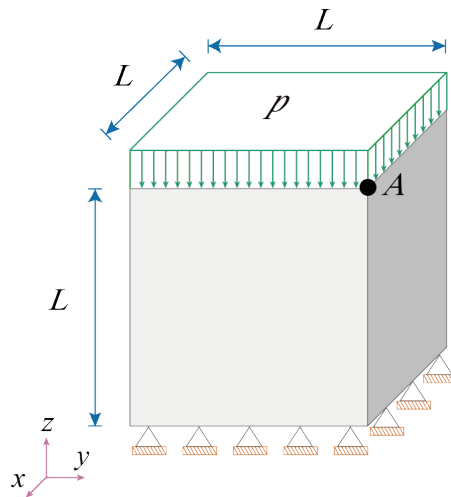


Fig. 3. 15 Cube with a base under uniform pressure
 $(L = 10 \text{ cm}, P = -0.5 \text{ N/m}^2, A_{10} = 0.5 \text{ Pa}, k = 100 \text{ Pa})$

Table 3. 5는 $8 \times 8 \times 8$ 메쉬에서 다양한 요소들의 수직 변위와 상대 오차를 비교한 결과를 보여준다. TET4E 요소는 메쉬 왜곡에 민감하게 반응하지 않으면서도 Nearly-Incompressible 초탄성 재료에서 발생하는 체적압축을 효과적으로 완화할 수 있다는 점에서 뛰어난 성능을 보였다. 반면, 다른 요소들의 경우 상대 오차가 7.04%에서 22.14% 사이로 나타나, TET4E 요소에 비해 정확도가 낮다.

Table 3. 5 Vertical displacement and relative error comparison for different elements

요소 타입	CS- T4	FS- T4	ES- T4	bFS- T4	TET4	TET4E	Ref.
변위(cm)	1.18	1.25	1.37	1.41	1.25	1.54	1.52
상대 오차 (%)	22.14	17.53	10.16	7.04	17.73	-1.27	-

Fig. 3. 16은 왜곡 계수에 TET4와 TET4E 요소의 수직 변위를 비교한 결과이다. TET4 요소는 왜곡 계수가 증가할수록 수직 변위가 급격히 감소하고, 메쉬 밀도가 높아져도 변위 값이 일정하게 유지되어 체적잠김이 발생함을 보여준다. 반면, TET4E 요소는 왜곡 계수와 관계없이 일관된 변위 반응을 보이며, 메쉬 밀도가 증가할수록 Reference에 더욱 가까운 값을 나타낸다.

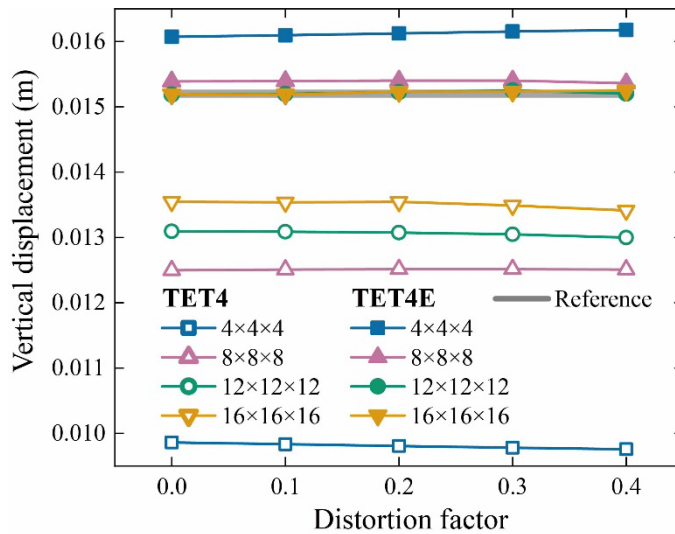


Fig. 3. 16 Vertical displacements across different distortion factors for TET4 and TET4E with varying mesh densities

Fig. 3. 17는 다양한 메쉬 밀도와 왜곡 계수에 따른 균일한 압력을 받는 블록의 변형된 형상을 보여준다. 상단 행은 왜곡 계수가 0일 때의 변형을 나타내고, 하단 행은 왜곡 계수가 0.4 일 때의 변형을 보여준다. 각 열은 $N = 8, 12, 16$ 으로 메쉬 밀도가 증가하는 경우에 대한 변형을 나타낸다. 왜곡 계수가 0인 경우와 0.4인 경우 모두에서 메쉬 밀도가 높아질수록 큐브의 변위가 균일하게 분포되는 것을 관찰할 수 있다.

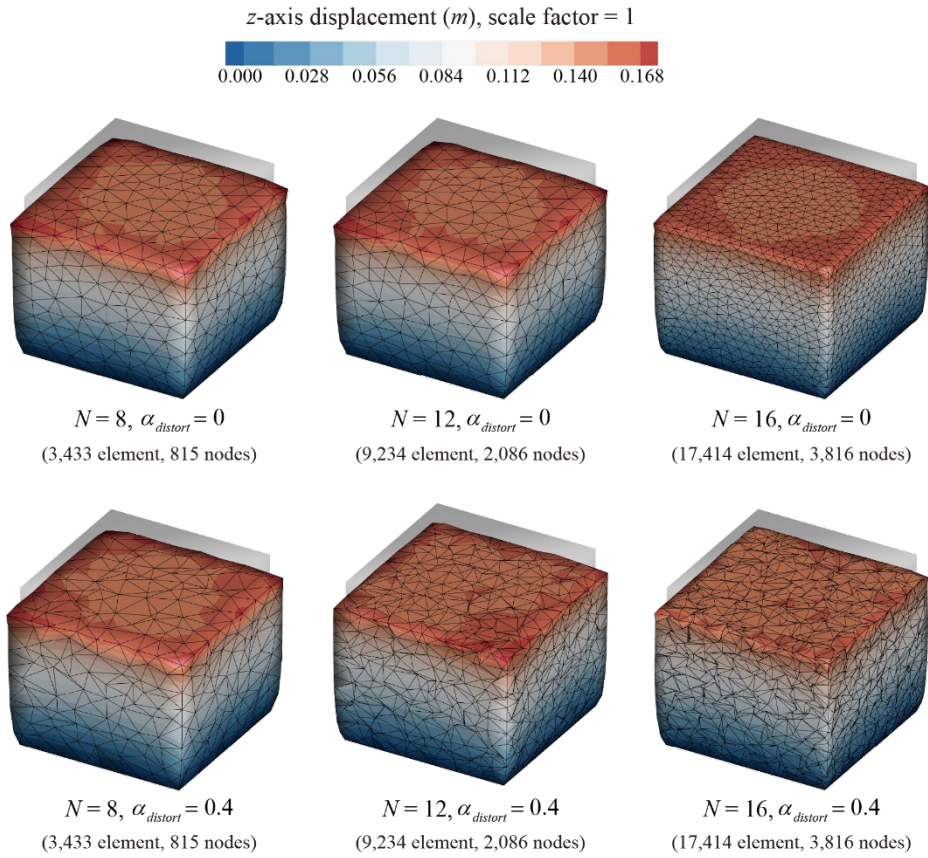


Fig. 3. 17 Deformed shapes of a cube under uniform pressure for different mesh densities and distortion factors

3.3.5. 압축 하중을 받는 초탄성 타이어

본 절에서는 개발된 유한요소의 산업적 적용 가능성을 입증하기 위해, 피렐리 Pzero 365/35R20RH 규격의 초탄성 타이어를 대상으로 유한요소의 성능을 평가하였다. 타이어 비드(Bead)의 모든 자유도를 제거하였으며, 타이어의 상부 표면에 $P = 13,207.5 \text{ kPa}$ 의 압축 하중을 적용하였다. Nearly-Incompressible Mooney-Rivlin 초탄성 재료 모델이 사용되었으며, Tang et al.이 제안한 타이어 고무의 재료상수 $A_{10}=8,061 \text{ kPa}$, $A_{01}=1,805 \text{ Pa}$, 체적 탄성계수 $k = 10,000 \text{ kPa}$ 를 사용하였다 [47]. 각 메쉬의 요소 및 절점 수는 다음과 같다.

- 거친 메쉬(Coarse): 35,590개의 요소, 13,140개의 절점
- 중간 메쉬(Medium): 48,873개의 요소, 17,504개의 절점
- 정밀 메쉬(Fine): 60,919개의 요소, 20,964개의 절점
- Reference: TET10로 구성된 50,055개의 요소, 102,537개의 절점

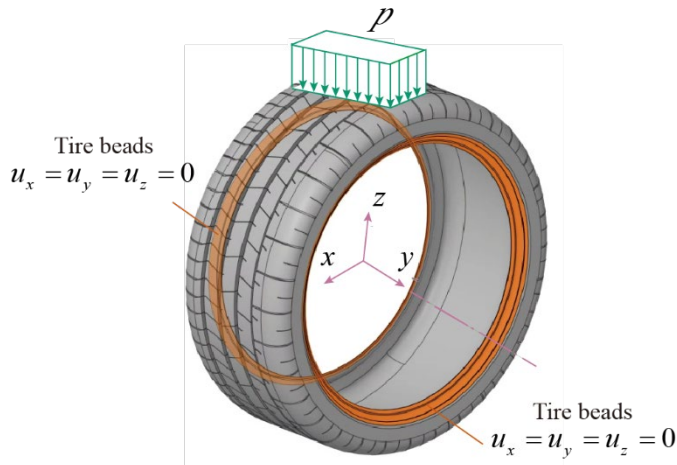


Fig. 3. 18 Tire under vertical load (265/35R20RH)
($P = 320 \text{ kPa}$, $A_{10} = 8,061 \text{ kPa}$, $A_{01} = 1,805 \text{ kPa}$, $k = 10,000 \text{ kPa}$)

Fig. 3. 19은 수평 위치에 따른 수직 변위를 TET4와 TET4E 요소로 비교한 것으로, 다양한 메쉬 밀도에서 Reference와의 차이를 보여준다. TET4 요소는 메쉬 밀도가 높아질수록 Reference와 가까워지긴 하지만 여전히 상당한 오차가 발생한다. 반면, TET4E 요소는 메쉬 밀도가 증가할수록 Reference와 매우 유사한 결과를 나타내며, Fine 메쉬에서는 변위 예측의 정확도가 현저히 향상되어 Reference에 수렴하는 경향을 보인다. TET4E 요소가 TET4 요소에 비해 체적감김을 효과적으로 완화하고, 왜곡된 메쉬에서도 더 높은 정확도를 제공한다.

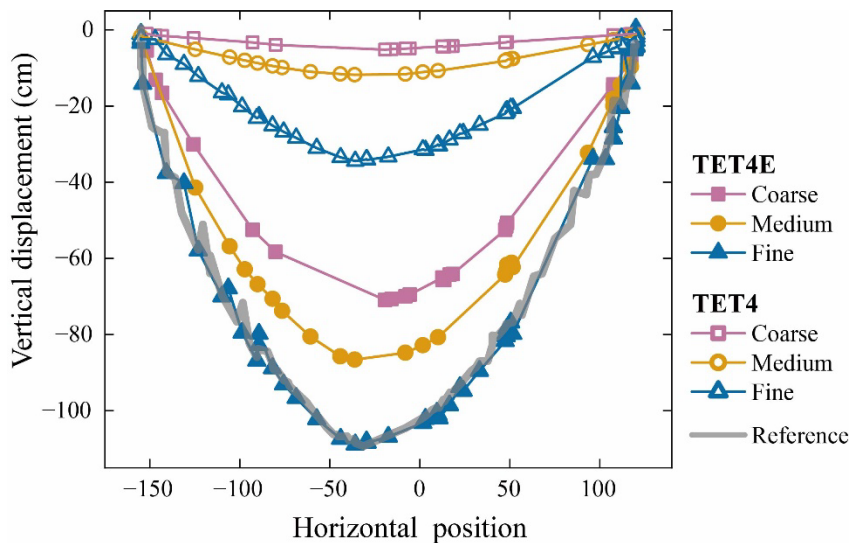


Fig. 3. 19 Vertical displacement of a tire's upper surface along the horizontal position

Fig. 3. 20은 균일한 압력이 가해진 타이어의 변형을 TET4(상단 행)와 TET4E(하단 행) 요소를 사용하여 다양한 메쉬 밀도에서 비교한 결과를 보여준다. TET4 요소는 메쉬 밀도가 높아져도 변형이 비교적 작게 나타나며, 특히 거친 메쉬에서는 변형이 거의 나타나지 않는다. 반면, TET4E 요소는 메쉬 밀도가 증가할수록 변형이 훨씬 더 뚜렷하게 나타난다.

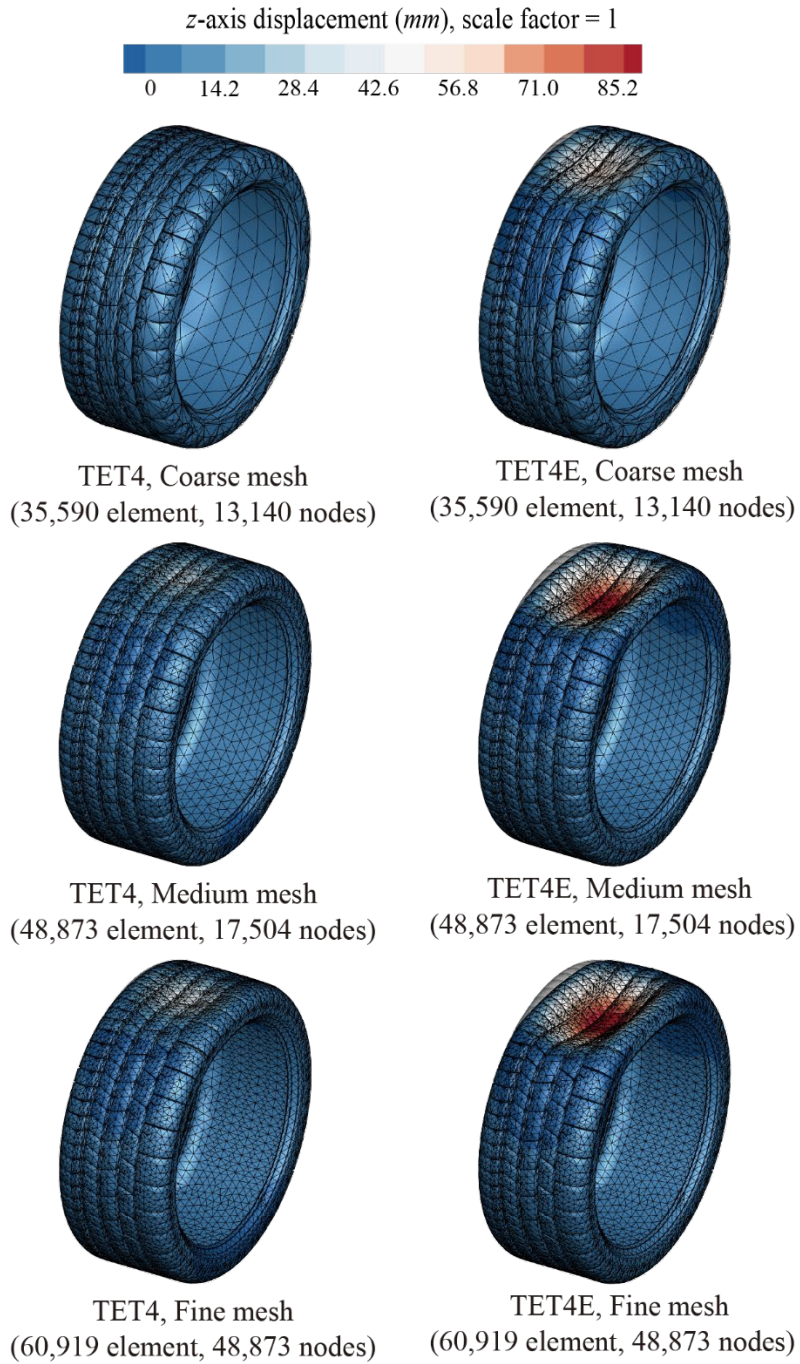


Fig. 3. 20 Comparison of deformation using TET4 and TET4E under uniform pressure across different mesh densities

4. 비선형 Partition of Unity 유한요소의

비선형 모드해석

비선형 모드 해석은 초탄성 재료의 구조물과 같이 큰 변형을 겪는 시스템에서 단순한 선형 해석으로는 거동을 예측할 수 없다. 특히, 초탄성 재료는 진폭에 따라 강성이 변하고, 큰 변형 시 기존의 선형 모드 해석으로는 그 비선형 거동을 반영할 수 없다. 따라서 비선형 모드 해석을 도입하여 재료의 비선형성과 구조적 거동을 정확히 포착한다. 이 절에서는 초탄성 재료에 PU 기반 유한요소법을 적용하여 비선형 모드 해석을 수행한 절차를 소개한다. 4.1절에서는 선형 및 비선형 강성 행렬을 모두 고려한 자유진동의 운동 방정식을 제시하며, 이를 바탕으로 자연 진동수와 모드 형상을 구하는 과정을 설명한다. 4.2절에서는 비선형 모드 해석의 반복적 접근 방식을 다루며, 구조물의 비선형성을 반영하여 고유값 문제를 해결하는 절차를 설명한다. 4.3장에서는 PU 기반 TET4E 요소를 사용하여 초탄성 구조물의 비선형 자연 진동수 정확도를 검증하기 위해 다양한 수치 예제를 수행하였으며, 이를 통해 TET4E 요소가 메쉬 왜곡 및 낮은 메쉬 밀도에서도 높은 정확도를 유지함을 확인하였다.

4.1. 자유진동 분석을 위한 운동 방정식

자유진동 시스템의 동적 거동은 다음의 운동 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{U}} + \left({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL} \right)' \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

여기서 $\mathbf{M}$ 은 시간에 독립적인 질량 행렬을 나타내며, ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$ 는 표준

절점 가속도 벡터와 PU 기반 절점 가속도 벡터를 포함하는 항을 의미한다. PU 항은 고차 변위 및 가속도 분포를 모델링하는 데 사용되기 때문에, 질량 행렬 계산에서는 사용되지 않으며, 질량 행렬은 요소의 기하학적 특성과 밀도에만 의존한다. 자유진동 해석에서는 다음 조건을 통해 자연 진동수를 결정한다:

$$\left({}^t_0\mathbf{K}_L + {}^t_0\mathbf{K}_{NL} - {}^t\omega^2\mathbf{M} \right) {}^t\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

위 방정식 (4. 2)은 표준 고유값 문제로, 이를 통해 고유값 문제로, 이를 통해 고유값과 고유 벡터를 구할 수 있다. 여기서 ${}^t\omega^2$ 는 고유값을, ${}^t\boldsymbol{\delta}$ 는 해당 고유값에 대응하는 고유벡터를 나타낸다. 자연 진동수는 고유값의 제곱근을 구해 얻을 수 있다.

4.2. 비선형 모드해석 절차

자유진동 문제에서 진동수와 진폭의 관계는 고유값 방정식을 통해 평가된다. 특히 비선형 고유값 방정식은 구조물의 비선형 거동을 고려하기 위해 반복적인 절차를 통해 해결된다. 이 과정은 다음과 같다.

1. **선형 해석:** 먼저, 모든 강성 행렬 ${}^0\mathbf{K}_{NL}$ 의 비선형 항을 0으로 설정하고, 선형 고유값 방정식을 풀어 기본적인 선형 진동수와 이에 대응하는 모드 형상을 계산한다.
2. **모드 형상 정규화:** 선형 모드형상 δ_0 은 최대 변위를 원하는 진폭 비율에 맞춰 스케일링하여 정규화한다 [48].
3. **비선형 강성 행렬 갱신:** 강성행렬은 정규화된 모드 형상 ${}^{i-1}\delta$ 를 사용하여 강성 행렬을 업데이트 한다.
4. **비선형 고유값 문제 해결:** 갱신된 강성행렬을 바탕으로 비선형 고유값 방정식을 풀어 비선형 고유진동수 및 모드형상을 얻는다.
5. **반복 과정:** 2-4단계를 반복하면서 새로운 모드 형상을 정규화하고 강성 행렬을 갱신한다. 수렴은 두 연속된 반복에서의 진동수 변화가 설정된 허용 오차 ($\left| \frac{{}^i\omega - {}^{i-1}\omega}{{}^{i-1}\omega} \right| < 10^{-4}$) 내로 들어올 때까지 진행한다.

PU 기반 유한요소법을 사용하여 초탄성 재료의 비선형 특성을 고려하면, 큰 변형이 발생하는 시나리오에서도 자연 진동수와 모드형상을 보다 정확하게 예측할 수 있다. 이 접근 방식은 초탄성 재료의

비선형 특성을 효과적으로 반영할 뿐만 아니라, 비선형 시스템의 진폭 의존적 거동을 정확하게 예측하는 데 중요한 해석 방법을 제공한다.

4.3. 초탄성 구조물의 비선형 모드해석 결과

본 절에서는 개발된 PU 기반 4절점 사면체 요소(TET4E)의 비선형 모드 해석 성능을 검증하기 위한 수치 예제를 수행하였다. 본 연구에서 사용한 예제에 대한 주요 내용은 다음과 같다.

1. **왜곡된 메쉬를 가지는 초탄성 판:** 왜곡된 메쉬를 가지는 초탄성 Nearly-Incompressible 재료로 이루어진 판에서 비선형 자연진동수 및 모드형상 추출 능력을 평가한다.
2. **Cutout을 가지는 초탄성 셸 실린더:** Cutout이 포함된 초탄성 Nearly-Incompressible 재료로 이루어진 셸 실린더 구조에서 다양한 메쉬 밀도에서의 비선형 모드 해석 성능을 평가한다.
3. **한쪽면이 고정된 초탄성 소프트 로봇:** 초탄성 Nearly-Incompressible 재료로 이루어진 소프트 로봇에서 비선형 자연진동수 계산 능력을 평가한다.

4.3.1. 왜곡된 메쉬를 가지는 초탄성 판

이 예제에서는 비선형 모드 해석에서 초탄성 판의 메쉬 왜곡이 진동에 미치는 영향을 연구한다. 예제 3.3.4에서 사용된 방정식 (3.39)을 따르며, 왜곡 계수는 0.3으로 설정된다. Fig. 4. 1은 한 변의 길이가 $L = 10 \text{ cm}$, 두께가 $t = 1 \text{ cm}$ 인 정사각형 판을 보여주며, 모든 자유도는 고정된 가장자리에서 고정되었다. 해석에는 Nearly-Incompressible Mooney-Rivlin 초탄성 재료 모델이 사용되었으며, 재료상수는 $A_{10} = 100 \text{ kN/m}^2$, $A_{01} = 50 \text{ kN/m}^2$, 체적 탄성 계수는 $k = 2,000 \text{ kN/m}^2$ 이며, 밀도는 $\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$ 을 사용하였다

본 수치 예제에서는 $N \times N$ 요소 메쉬($N = 4, 8, 12, 16$)를 사용하여 해석을 수행하였으며, 다양한 메쉬 밀도에서의 해석 결과를 Reference와 비교하였다. 사용된 메쉬의 구체적인 절점 및 요소 수는 Table 4. 1에 기술되어 있다.

Table 4. 1 Mesh density and corresponding element and node counts used in example 4.3.1.

	한 변당 요소의 개수 (N)			
	4	8	12	16
요소 수	130	670	1,332	991
절점 수	60	246	468	3,426
Reference: TET10 요소 타입, 1,062 개 요소, 2,217 개 절점 사용				

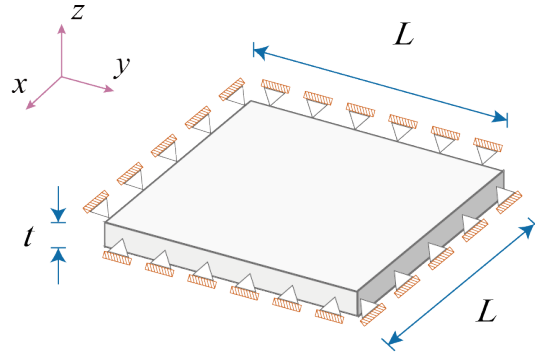


Fig. 4. 1 Fixed boundary configuration of distorted hyperelastic plate

($L = 10 \text{ cm}$, $t = 1 \text{ cm}$, $A_{10} = 100 \text{ kN/m}^2$, $A_{01} = 50 \text{ kN/m}^2$, $k = 2,000 \text{ kN/m}^2$, $\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$)

Fig. 4. 2는 다양한 메쉬 밀도를 가진 왜곡된 메쉬를 가용하여 초탄성 판의 여러 모드 형상에 대응하는 비선형 자연 진동수를 비교한 결과를 보여준다. 메쉬 밀도는 4×4 , 8×8 , 12×12 , 16×16 으로 설정되어 있으며, TET4와 TET4E 요소가 사용되었다. TET4E 요소는 메쉬 밀도가 4×4 에서 16×16 으로 증가할수록 Reference에 매우 근접한 결과를 보였다. 하지만, TET4 요소는 Reference에 수렴하지 못하고 여전히 큰 오차를 보였다. 이는 TET4E 요소가 왜곡된 메쉬 상황에서도 TET4요소보다 더 높은 정확성으로 Reference에 유사한 결과를 제공함을 보여준다.

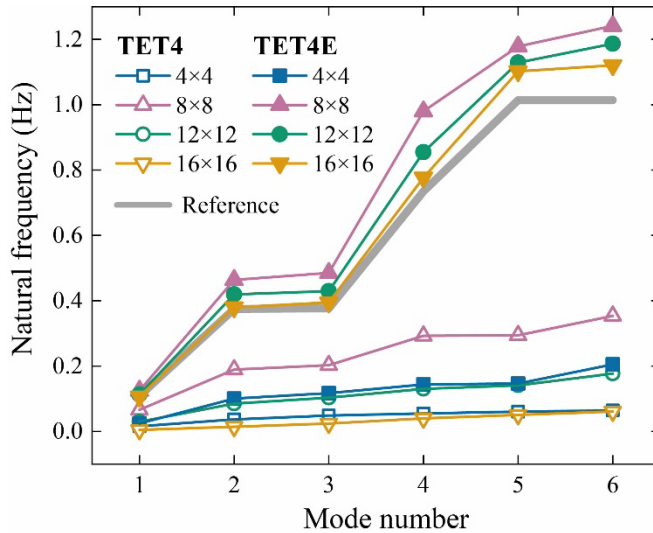


Fig. 4. 2 Natural frequency comparison for distorted hyperelastic plate using TET4 and TET4E elements across different mesh resolutions

Fig. 4. 3 은 스케일 팩터 2를 사용한 TET4E 요소의 왜곡된 메쉬로 구성된 초탄성 판의 처음 여섯 가지 모드 형상을 보여준다. 모드 1은 구조물 중앙에서 상하 운동하는 기본 모드(Fundamental Mode)을 나타낸다. 모드 2와 3은 각각 두 개의 봉우리가 생성되며, 양쪽 봉우리가 반대 위상(한쪽이 올라갈 때 다른 쪽이 내려감)으로 진동한다. 모드 4는 네 개의 봉우리가 나타나며, 봉우리 간 위상 차이가 존재한다. 모드 5는 평면 방향(In Plane) 변형을 나타낸다. 마지막으로 모드 6은 세 개의 봉우리를 가지며, 양 옆 봉우리가 동일 위상으로 움직이고, 가운데 봉우리와는 반대 위상을 가진다.

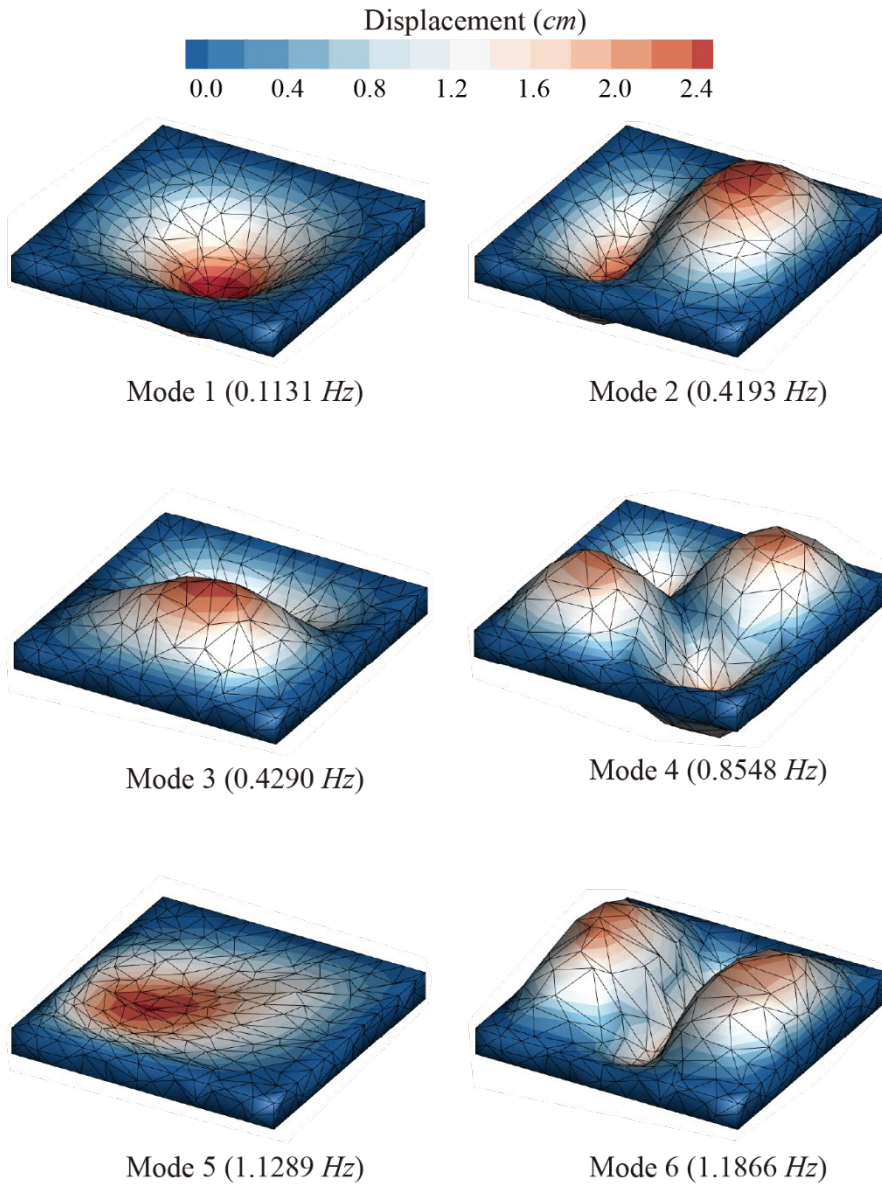


Fig. 4. 3 Mode shapes of a distorted plate using TET4E elements up to mode 6 with scale factor 2

4.3.2. Cutout을 가지는 쉘 실린더

원통형 쉘 구조물은 파이프라인, 항공기 동체, 저장 탱크 등에서 중요한 역할을 한다. 따라서 원통형 쉘의 모드 해석을 통해 자연 진동수와 모드 형태를 정확히 파악하는 것이 중요하다. 이 절에서는 Cutout을 가지는 초탄성 원통형 쉘 구조물의 비선형 자유 진동 해석을 수행하였다. Fig. 4. 4는 해석에서 사용된 원통형 쉘 구조물의 형상을 나타내며, 길이 $L = 10\text{ cm}$, 끝에서 개구 중심까지의 거리 $a = 5\text{ cm}$, 개구 직경 $d = 3\text{ cm}$, 쉘 직경 $R = 9\text{ cm}$, 두께 $t = 1\text{ cm}$ 로 구성되어 있다. Nearly-Incompressible Mooney-Rivlin 초탄성 재료 모델을 사용하였으며, 재료상수는 $A_{10} = 50\text{ kN/cm}^2$, $A_{01} = 100\text{ kN/cm}^2$, 체적 탄성 계수 $k = 1,000\text{ kN/cm}^2$, 밀도 $\rho = 1,000\text{ kg/m}^3$ 를 사용한다. 자유 진동 해석을 위해 다양한 메쉬 밀도에서 사면체 메쉬를 사용하였으며, 각 메쉬 밀도별 요소와 절점 수는 다음과 같다.

- 거친 메쉬(Coarse): 785개의 요소, 298개의 절점
- 중간 메쉬(Medium): 1,683개의 요소, 608개의 절점
- 정밀 메쉬(Fine): 2,428개의 요소, 871개의 절점
- Reference: TET10로 구성된 1,874개의 요소, 3,895개의 절점

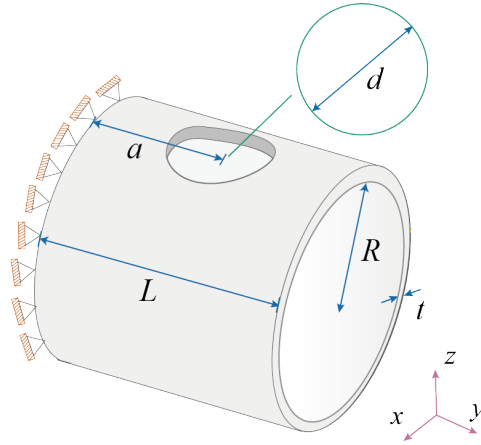


Fig. 4. 4 Cut-out cylindrical shell structure with fixed boundaries ($L = 10 \text{ cm}$, $R = 9 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$, $d = 3 \text{ cm}$, $t = 1 \text{ cm}$, $A_{I0} = 50 \text{ kN/m}^2$, $A_{0I} = 100 \text{ kN/m}^2$, $k = 1000 \text{ kN/m}^2$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Fig. 4. 5는 TET4와 TET4E 요소를 사용하여 다양한 메쉬 밀도(Coarse, Medium, Fine)에서 계산된 고유 진동수를 Reference와 비교한다. TET4E 요소는 모든 메쉬 밀도에서 Reference와 매우 유사한 값을 나타내며, 특히 Medium 및 Fine 메쉬에서 모든 모드에서 5% 이내의 오차를 보인다. 반면 TET4 요소는 Coarse 메쉬에서 큰 오차를 보이며, 메쉬 밀도를 높여도 Reference와의 차이를 완전히 줄이지 못한다. TET4E 요소는 모드 1부터 10까지의 모든 모드에 TET4 요소보다 더 정확한 결과를 보여준다.

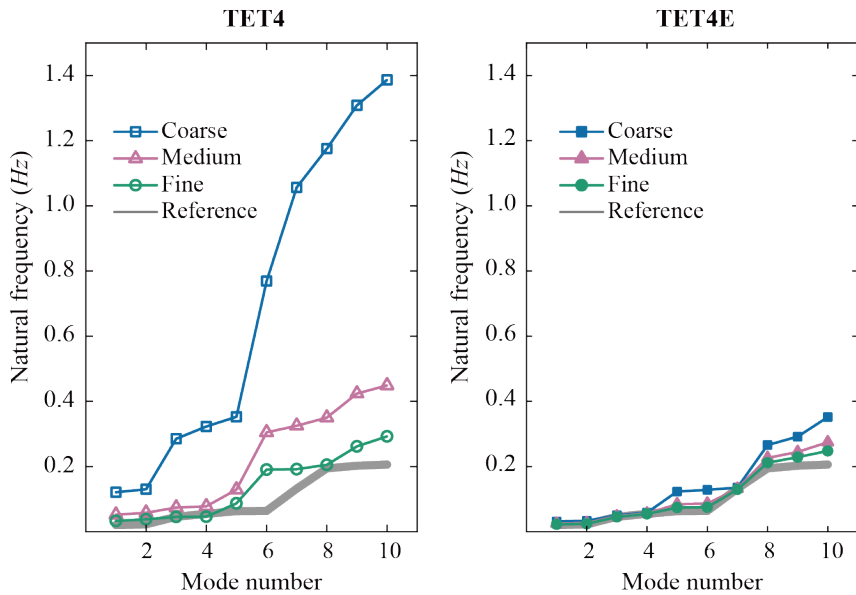


Fig. 4. 5 Natural frequencies for different mesh densities and elements TET4 and TET4E compared to the reference solution

Fig. 4. 6 은 스케일 팩터 2 로 설정된 상태에서 Cutout 이 있는 원통형 셸 구조물의 비선형 진동 모드 1 부터 8 까지의 변형을 보여준다. 모드 1 과 2 에서는 원통의 둘레 방향으로 기본적인 굽힘(Bending) 변형을 보인다. 모드 3 과 4 에서는 길이 방향으로 압축 및 인장 변형이 나타나며, 모드 5 와 6 은 둘레 방향의 파형이 복잡해지며 세개의 파형으로 변형된다. 모드 7 과 8 에서는 길이 방향 웨이브의 변형 패턴이 관찰된다.

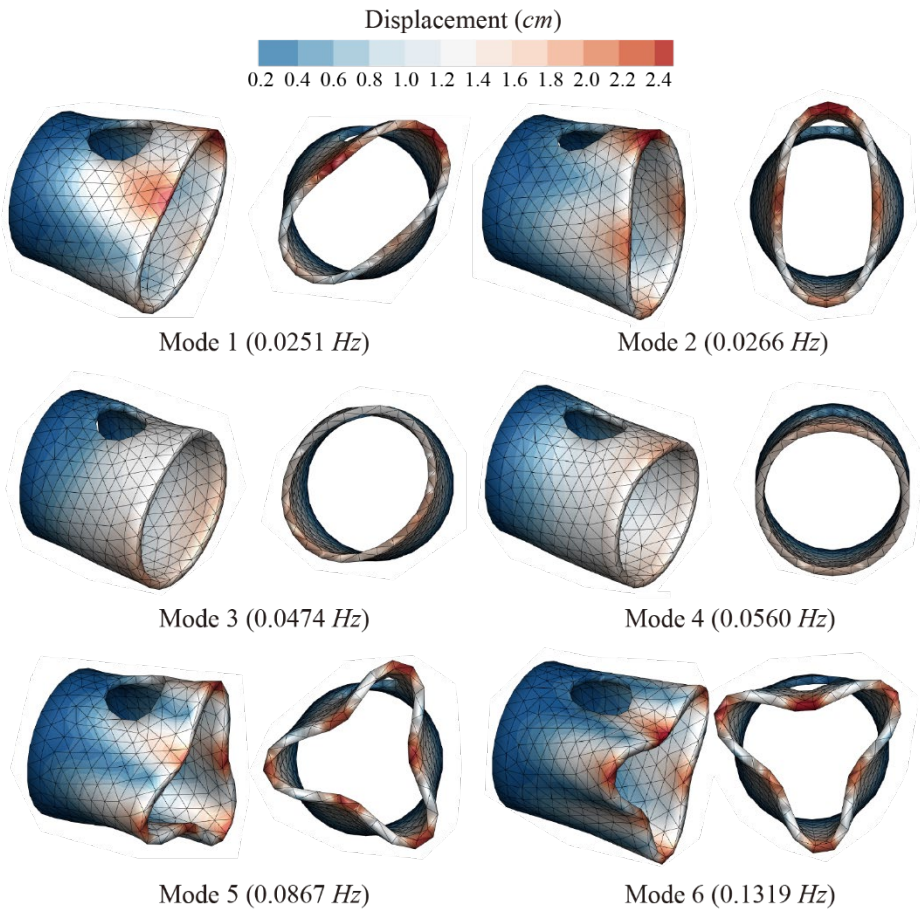


Fig. 4. 6 Mode shapes of cylindrical shell structures using TET4E elements up to mode 8 with scale factor 2

4.3.3. 한쪽면이 고정된 초탄성 소프트 로봇

소프트 로봇은 부드럽고 탄성적으로 변형될 수 있는 특성을 활용해 의료, 재난 대응, 탐사, 회로 수리 등 다양한 분야에서 널리 활용되고 있다 [5]. 비선형 모드 해석은 소프트 로봇의 고유 진동수와 모드 형상을 파악하는데 중요한 역할을 하며, 이를 통해 공진 현상을 방지하고 정밀한 모션 제어가 가능하다. Fig. 4. 7는 소프트 로봇의 형상과 경계 조건을 보여준다. 로봇의 치수는 $L = 39\text{ cm}$, $a = 8\text{ cm}$, $h = 10\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $c = 4\text{ cm}$ 이며, 한쪽 끝은 고정되어 있다. 로봇에 사용된 재료는 Smooth-Sil 840으로, Neo-Hookean 재료이며, $A_{10} = 0.34\text{ MPa}$ 의 탄성 계수, $k = 10\text{ MPa}$ 의 체적 탄성 계수, $\rho = 1,000\text{ kg/m}^3$ 의 밀도를 가진다 [49]. 메쉬는 TET4 요소와 TET4E 요소로 구성된 1,827개의 절점와 5,919개의 요소, 육면체 요소로 구성된 1,839개의 절점와 1,264개의 요소로 이루어져 있다. Reference으로 사용된 TET10 요소는 9,046개의 절점과 4,665개의 요소로 나누어져 있다. 각 메쉬의 요소 및 절점 수는 다음과 같다.

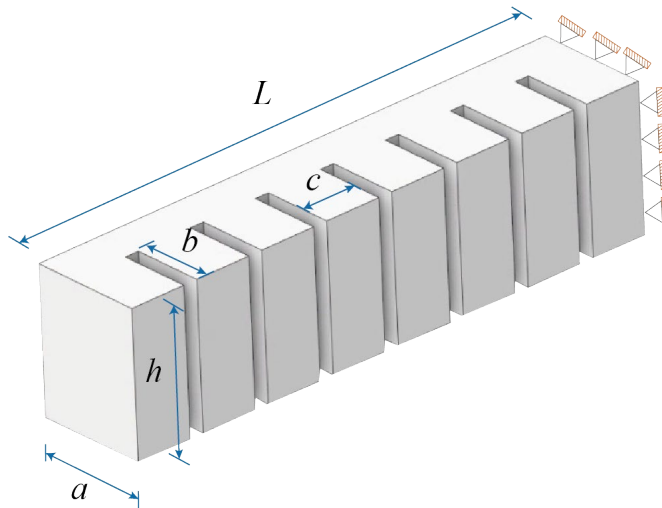


Fig. 4. 7 Soft Robots with fixed boundaries ($L = 39\text{ cm}$, $a = 8\text{ cm}$, $h = 10\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $c = 4\text{ cm}$, $A_{10} = 0.34\text{ MPa}$, $k = 10\text{ MPa}$, $\rho = 1,000\text{ kg/m}^3$)

Fig. 4. 8는 스케일 팩터 3으로 나타낸 소프트 로봇의 첫 번째에서 여덟 번째 모드 형상을 보여준다. 모드 1과 2는 주로 종방향에서 발생하는 압축과 인장을 나타낸다. 모드 3은 종방향 굽힘 진동 거동을 보여준다. 모드 4는 로봇 전체에 걸쳐 종방향 비틀림을 유발한다. 모드 5는 종방향 굽힘과 비틀림이 결합된 형태로, 로봇 양 끝에서 대칭적인 굽힘과 중앙 부분의 비틀림을 포함한다. 모드 6은 두 개의 굽힘이 발생하는 것을 보여준다.

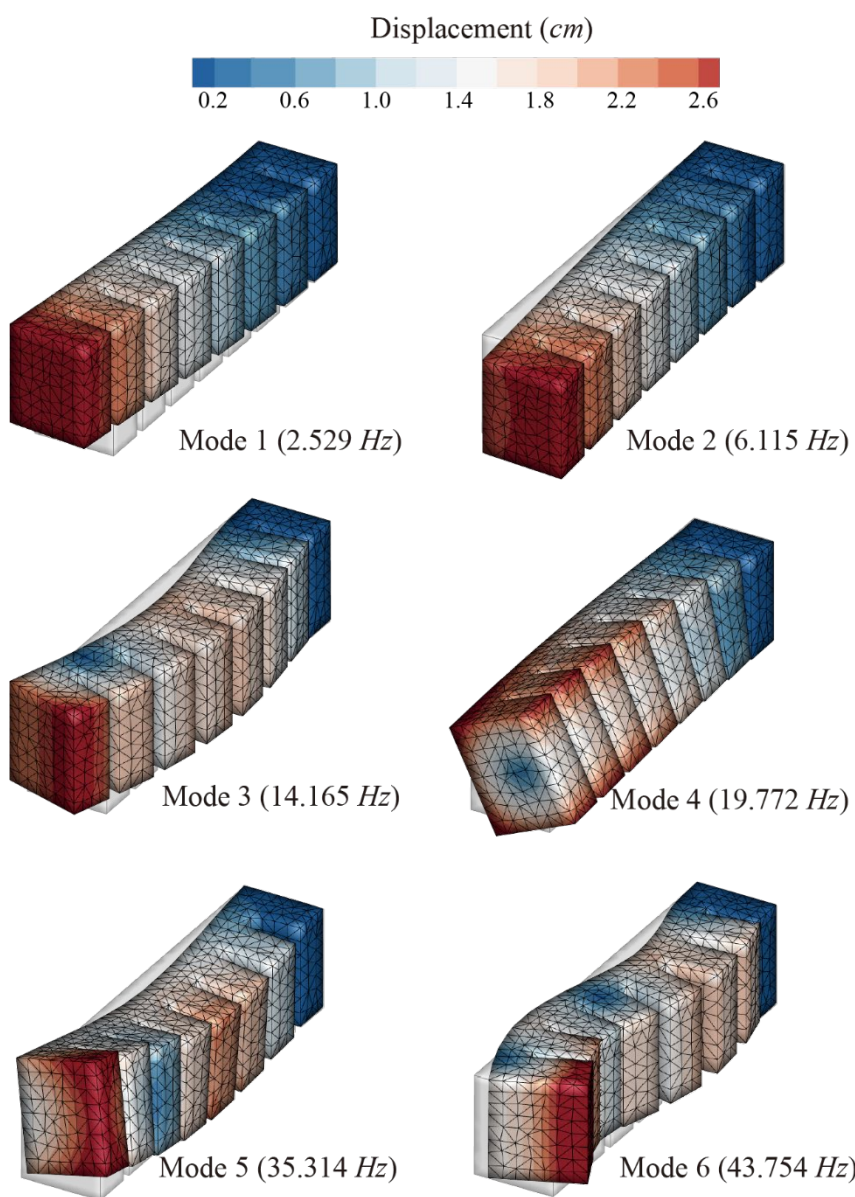


Fig. 4. 8 Mode shapes of a soft robot using TET4E elements up to mode 6 with scale factor 3

5. 결 론

본 연구에서는 Nearly-Incompressible 초탄성 재료로 구성된 구조물의 비선형 정적 및 모드 해석을 위해 Partition of Unity(PU) 기반 4 절점 사면체 유한요소(TET4E)를 개발하였다. 제안된 요소는 PU 프레임워크 내에서 표준 4 절점 사면체 요소의 변위장을 선형 다항식 기저로 확장함으로써, 제안된 요소는 추가적인 노드 도입없이 체적 잠금을 효과적으로 제거하고 유한 요소 해의 성능을 향상시켰다.

TET4E 요소는 페널티 방법을 사용하여 Mooney-Rivlin 및 Neo-Hookean 재료 모델과 통합되어 Nearly-Incompressible 초탄성 재료의 거동을 구현하였다. 대변위 해석을 위한 Total Lagrangian 정식화를 채택하였다. 또한, 진폭 기반 비선형 모드 해석 절차를 활용하여 비선형 고유진동수와 해당 모드 형상을 도출하였다.

개발된 TET4E 요소의 성능과 정확성은 다양한 수치 예제를 통해 검증되었다. 비선형 정적 해석에서는 푸아송 비 증가에 따른 요소당 체적 잠금 완화 능력, 압축 하의 초탄성 블록, 메쉬 왜곡에 대한 민감도 분석, 압축 하의 초탄성 타이어 등을 수행하였다. 비선형 모드해석에서는 왜곡된 메쉬를 사용한 초탄성 판의 자유 진동, Cutout 이 있는 초탄성 원통 쉘, 한쪽이 고정된 초탄성 소프트 로봇 등의 사례에서 비선형 고유 진동수와 모드 형상을 비교하였다. 비선형 정적 및 모드 해석 결과에서 TET4E 요소는 체적 잠금을 효과적으로 완화하여 해의 정확도를 높였으며, 메쉬가 왜곡되더라도 해의 안정성을 유지하였고, 적은 수의 메쉬로도 높은 정확도를 보였다.

개발된 TET4E 요소는 Nearly-Incompressible 초탄성 재료로 구성된 구조물을 설계하고 분석하는 엔지니어와 연구자들에게 신뢰할

수 있는 도구를 제공한다. 향후 연구에서는 이방성 재료, 점탄성 재료 및 초탄성 복합재료 등 다양한 재료 모델로 확장하고, 시간도메인을 포함하는 동적 해석으로 확장할 계획이다. 이러한 발전은 댐퍼 및 부상 시스템, 생의학 공학, 소프트 로보틱스 등 다양한 분야에서 개선된 시뮬레이션 도구를 제공할 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

1. Martins, P., R. Natal Jorge, and A. Ferreira, *A comparative study of several material models for prediction of hyperelastic properties: Application to silicone-rubber and soft tissues*. Strain, 2006. **42**(3): p. 135–147.
2. Chen, M., et al., *Finite element analysis of hyperelastic contact problem in valve sealing structure*. Zhongguo Jixie Gongcheng/China Mechanical Engineering, 2007. **18**(15): p. 1773–1775.
3. Bergström, J.S. and M.C. Boyce, *Constitutive modeling of the time-dependent and cyclic loading of elastomers and application to soft biological tissues*. Mechanics of materials, 2001. **33**(9): p. 523–530.
4. Moghadam, S.R. and D. Konstantinidis, *Finite element study of the effect of support rotation on the horizontal behavior of elastomeric bearings*. Composite Structures, 2017. **163**: p. 474–490.
5. Yap, Y.L., S.L. Sing, and W.Y. Yeong, *A review of 3D printing processes and materials for soft robotics*. Rapid Prototyping Journal, 2020. **26**(8): p. 1345–1361.
6. Frías, E.R. and J. Di Paolo, *Structural study of a polymeric aortic valve prosthesis. Analysis for a hyperelastic material*. Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 2023. **148**: p. 106193.
7. Ramírez-Torres, A., et al., *Action of body forces in tumor growth*. International Journal of Engineering Science, 2015. **89**: p. 18–34.
8. Polygerinos, P., et al., *Soft robotic glove for combined assistance and at-home rehabilitation*. Robotics and Autonomous Systems, 2015. **73**: p. 135–143.
9. Bathe, K.-J., *Finite element procedures*. 2006: Klaus-Jurgen Bathe.
10. Pagani, A. and E. Carrera, *Unified one-dimensional finite element for the analysis of hyperelastic soft materials and structures*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2023. **30**(2): p. 342–355.
11. Kim, N.-H., *Introduction to nonlinear finite element analysis*. 2014: Springer Science & Business Media.
12. Bijalwan, A., et al., *Volumetric locking free 3D finite element for modelling of anisotropic visco-hyperelastic behaviour of anterior cruciate ligament*. Journal of biomechanics, 2018. **73**: p. 1–8.
13. Schröder, J., et al., *A novel mixed finite element for finite*

- anisotropic elasticity: the SKA-element Simplified Kinematics for Anisotropy*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016. **310**: p. 475–494.
14. Zienkiewicz, O., R. Taylor, and J. Too, *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1971. **3**(2): p. 275–290.
 15. Belytschko, T. and T. Black, *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. International journal for numerical methods in engineering, 1999. **45**(5): p. 601–620.
 16. Arnold, D.N., F. Brezzi, and M. Fortin, *A stable finite element for the Stokes equations*. Calcolo, 1984. **21**(4): p. 337–344.
 17. Caylak, I. and R. Mahnken, *Stabilization of mixed tetrahedral elements at large deformations*. International journal for numerical methods in engineering, 2012. **90**(2): p. 218–242.
 18. Liu, G.-R. and Y.-T. Gu, *An introduction to meshfree methods and their programming*. 2005: Springer Science & Business Media.
 19. Belytschko, T., et al., *Meshless methods: an overview and recent developments*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1996. **139**(1–4): p. 3–47.
 20. Babuška, I. and J.M. Melenk, *The partition of unity method*. International journal for numerical methods in engineering, 1997. **40**(4): p. 727–758.
 21. Jun, H., *New higher-order triangular shell finite elements based on the partition of unity*. Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal, 2020. **73**(1): p. 1–16.
 22. Kim, S. and P.-S. Lee, *A new enriched 4-node 2D solid finite element free from the linear dependence problem*. Computers & Structures, 2018. **202**: p. 25–43.
 23. Kim, S. and P.-S. Lee, *New enriched 3D solid finite elements: 8-node hexahedral, 6-node prismatic, and 5-node pyramidal elements*. Computers & Structures, 2019. **216**: p. 40–63.
 24. Jeon, H.-M., P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, *The MITC3 shell finite element enriched by interpolation covers*. Computers & Structures, 2014. **134**: p. 128–142.
 25. Jun, H., et al., *The MITC3+ shell element enriched in membrane displacements by interpolation covers*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018. **337**: p. 458–480.
 26. Shibanuma, K. and T. Utsunomiya, *Reformulation of XFEM based on PUFEM for solving problem caused by blending elements*. Finite Elements in Analysis and Design, 2009. **45**(11): p. 806–816.
 27. Rodríguez-Tembleque, L., et al., *XFEM crack growth virtual*

- monitoring in self-sensing CNT reinforced polymer nanocomposite plates using ANSYS*. Composite Structures, 2022. **284**: p. 115137.
28. Cruz, F., D. Roehl, and E. do Amaral Vargas Jr, *An XFEM implementation in Abaqus to model intersections between fractures in porous rocks*. Computers and Geotechnics, 2019. **112**: p. 135–146.
 29. Rabczuk, T., S. Bordas, and G. Zi, *On three-dimensional modelling of crack growth using partition of unity methods*. Computers & structures, 2010. **88**(23–24): p. 1391–1411.
 30. Mooney, M., *A theory of large elastic deformation*. Journal of applied physics, 1940. **11**(9): p. 582–592.
 31. Rivlin, R., *Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1948. **240**(822): p. 459–490.
 32. Wex, C., et al., *Isotropic incompressible hyperelastic models for modelling the mechanical behaviour of biological tissues: a review*. Biomedical Engineering/Biomedizinische Technik, 2015. **60**(6): p. 577–592.
 33. Naylor, D., *Stresses in nearly incompressible materials by finite elements with application to the calculation of excess pore pressures*. international journal for numerical methods in engineering, 1974. **8**(3): p. 443–460.
 34. De Borst, R., et al., *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. 2012: John Wiley & Sons.
 35. Nguyen-Thoi, T., et al., *A face-based smoothed finite element method (FS-FEM) for 3D linear and geometrically non-linear solid mechanics problems using 4-node tetrahedral elements*. International journal for numerical methods in Engineering, 2009. **78**(3): p. 324–353.
 36. Cui, X., S. Feng, and G. Li, *A cell-based smoothed radial point interpolation method (CS-RPIM) for heat transfer analysis*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2014. **40**: p. 147–153.
 37. Cazes, F. and G. Meschke, *An edge-based smoothed finite element method for 3D analysis of solid mechanics problems*. International journal for numerical methods in engineering, 2013. **94**(8): p. 715–739.
 38. Lee, C., et al., *Bubble-enriched smoothed finite element methods for nearly-incompressible solids*. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2021. **127**(2): p. 411–436.
 39. Masud, A. and T.J. Truster, *A framework for residual-based*

- stabilization of incompressible finite elasticity: Stabilized formulations and F methods for linear triangles and tetrahedra*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013. **267**: p. 359–399.
40. Elguedj, T., et al., *B and F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2008. **197**(33–40): p. 2732–2762.
 41. Reese, S., P. Wriggers, and B. Reddy. *A new locking-free brick element formulation for continuous large deformation problems*. in *Computational mechanics, new trends and applications, proceedings of the fourth world congress on computational mechanics WCCM IV Buenos Aires, CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos in Ingeniería), Barcelona*. 1998.
 42. Büchter, N., E. Ramm, and D. Roehl, *Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept*. International journal for numerical methods in engineering, 1994. **37**(15): p. 2551–2568.
 43. Karabelas, E., et al., *Versatile stabilized finite element formulations for nearly and fully incompressible solid mechanics*. Computational mechanics, 2020. **65**(1): p. 193–215.
 44. Pagani, A., et al., *Unified three-dimensional finite elements for large strain analysis of compressible and nearly incompressible solids*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2024. **31**(1): p. 117–137.
 45. Rajendran, S. and B. Zhang, *A “FE-meshfree” QUAD4 element based on partition of unity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007. **197**(1–4): p. 128–147.
 46. Bordas, S.P., et al., *Strain smoothing in FEM and XFEM*. Computers & structures, 2010. **88**(23–24): p. 1419–1443.
 47. Tang, T., et al., *Numerical evaluation of the temperature field of steady-state rolling tires*. Applied Mathematical Modelling, 2014. **38**(5–6): p. 1622–1637.
 48. Nanda, N. and J.N. Bandyopadhyay, *Nonlinear Free Vibration Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shells with Cutouts*. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2007. **26**(14): p. 1413–1427.
 49. Xavier, M.S., et al., *Soft pneumatic actuators: A review of design, fabrication, modeling, sensing, control and applications*. IEEE Access, 2022. **10**: p. 59442–59485.